Retour aux applications linéaires

Exercice 101
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs :
$u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$ et $w = (3, 3, -5)$.
On note F le sous-espace engendré par (u, v, w).

1) Déterminer une base de F.

2) Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ vers lui-même définie pour tous réels α, β et γ par :

$$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

3) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$; préciser $\operatorname{rg} f$.

4) A-t-on $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

5) Les vecteurs u, v et w sont-ils des éléments de $\operatorname{Im} f$?

6) Déterminer une base et la dimension de $F \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 102
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{Q}$ et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3, \qquad u(e_2) = e_1 - e_2 + e_3, \qquad u(e_3) = e_1 + e_2 - e_3.$$

On note enfin $F = \{\, x \in E \mid u(x) = x \,\}$, $G = \{\, x \in E \mid u(x) = -x \,\}$ et $H = \{\, x \in E \mid u(x) = -2x \,\}$

1) Écrire la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de E.

2) Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E, et déterminer une base de chacun d'entre eux.

3) Montrer que $E = F \oplus H$. Déterminer une nouvelle base (f_1, f_2, f_3) de E telle que :

$$u(f_1) = f_1, \qquad u(f_2) = -2f_2, \qquad u(f_3) = -2f_3.$$

Écrire la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) de E.

4) Montrer que u est bijective.

Exercice 103
Soit $u \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini par :
pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (-y + 2z, 2x - 3y + 4z, x - y + z)$$

et soit $v = u + Id_{\mathbf{R}^3}$.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

2) Quel est le rang de u ?
Déterminer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.

3) Écrire la matrice de v dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Quel est le rang de v ? Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} v$?

4) Montrer que pour tout x de $\operatorname{Ker} v$, $u(-x) = x$; en déduire que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$, puis que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$.

5) Montrer que $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$.

6) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, $u^3(x) = u(x)$, et que pour tout $x \in \operatorname{Ker} v$, $u^3(x) = u(x)$.

7) Montrer que $u^3 = u$.

Exercice 104
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = e_2 + e_3, \qquad u(e_2) = -e_1 - e_2 + e_4, \qquad u(e_3) = e_1 + e_2 - e_4, \qquad u(e_4) = -e_1 + e_3 + e_4.$$

1) Pour chacun des vecteurs e_i de la base (e_1, e_2, e_3, e_4), calculer $u^2(e_i)$ (où on note $u^2 = u \circ u$). En déduire que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

2) On pose $f_1 = u(e_1)$ et $f_2 = u(e_4)$. Montrer que (f_1, f_2) est une base de $\operatorname{Im} u$.

3) Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

4) On pose $f_3 = e_1 + e_4$ et $f_4 = e_1 - e_4$. Soit F le sous-espace de E engendré par (f_3, f_4).
Montrer que $F \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
En déduire que la restriction $u_{|F}$ de u à F est une application linéaire bijective de F sur $\operatorname{Im} u$.
Montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus F$. En déduire que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E.

5) Pour un vecteur x de E écrit dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) sous la forme : $x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$ exprimer $u(x)$ dans cette même base.

Exercice 105
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer, en calculant le moins possible, que $\operatorname{Ker} u$ est une droite.

2) Déterminer une base a de $\operatorname{Ker} u$.

3) On note $b = (1, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 0)$. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans la base (a, b, c).

4) On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.

   a) On note v la restriction de u, de E vers $\mathbf{R}^3$. Expliciter la matrice de v dans (b, c) et (a, b, c).

   b) Montrer que cela a un sens de considérer l'application w, restriction de u de E vers E, et expliciter la matrice de w dans la base (b, c).

Exercice 106
1) Donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f \circ f = 0 \text{ et } \dim E = 2 \operatorname{rg}(f).$$

Exercice 107
Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soit f un endomorphisme de E.

1) Montrer les inclusions :

$$\operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f \circ f).$$

2) Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Im}(f \circ f) = \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f.$$

3) Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f \iff E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Exercice 108
Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.

1) Soit f et g deux applications linéaires de E dans F.
Montrer que :

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

2) Soit u et v deux endomorphismes de E.

a) On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est bijectif.
Montrer que :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim E.$$

b) Montrer que :

$$\dim[\operatorname{Ker}(u \circ v)] \leq \dim[\operatorname{Ker} u] + \dim[\operatorname{Ker} v].$$

En déduire que :

$$\operatorname{rg}(u \circ v) \geq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E.$$

Exercice 109
Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de E vers G.
Montrer l'équivalence de :

(i) $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

et

(ii) Il existe une application linéaire h de G vers F telle que $f = h \circ g$.

Pratique du calcul des primitives et intégrales

Exercice 110
Calculer :

a) $\displaystyle\int \ln x \, dx$ b) $\displaystyle\int \operatorname{Arctan} x \, dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x} \, dx$ d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx$

Exercice 111
Calculer :

a) $\displaystyle\int x e^{1+x^2} \, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi$ c) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$

Exercice 112
1) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx.$$

2) En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta) \, d\theta \text{ et } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \, d\varphi.$$

3) Le résultat de la première question est-il vrai ou faux si on suppose seulement f continue par morceaux ?
Démonstration ou contre-exemple.

Exercice 113
Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes (sauf indication expresse de l'énoncé, il n'est pas demandé d'expliciter l'intervalle sur lequel on calcule) :

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$ f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,dx$ g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$ h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{500}(x-1)}$ j) $\displaystyle\int \frac{(x^5+x+1)\,dx}{x^4(x-1)^3}$ k) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ l) $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2006}\frac{dx}{x^2}$

m) $\displaystyle\int \frac{6x^2+2}{x^4+x^2+1}\,dx$ n) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,dx$ o) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ p) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\,dx$

q) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}\,dx$ r) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx$ s) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx$ t) $\displaystyle\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx.$

Exercice 114
En utilisant le changement de variable $t=\pi-x$, calculer :

$$\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Exercice 115
Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ (poser $t=e^{-x}$) b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t=\sqrt{x+1}$) c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t=\sqrt{2}/x$)

d) $\displaystyle\int x^2\ln(x^6-1)\,dx$ (poser $t=x^3$) e) $\displaystyle\int_0^1 \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Exercice 116
Calculer la dérivée $\displaystyle\frac{d}{d\varphi}[\ln(|\tan\varphi|)]$.
En déduire :

a) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}$ b) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

Exercice 117
Pour $n\geq 0$, soit $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour $n=2k$ pair

$$I_{2k}=\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2k)}\frac{\pi}{2}$$

et que pour $n=2k+1$ impair

$$I_{2k+1}=\frac{2\times 4\times\cdots\times(2k)}{3\times 5\times\cdots\times(2k+1)}$$

3) Montrer que I_n est une fonction décroissante de n.

4) Montrer que quand $k\to+\infty$

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2k}{2k+1}\to\frac{\pi}{2}$$ (c'est la "formule de Wallis").

Exercice 118
Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x \, dx.$$

1) Calculer I_1.
2) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1).$$

3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$

5) Montrer que $\dfrac{2^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
6) Montrer que :

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} \to e^2 \qquad \text{quand } n \to \infty$$

Exercice 119
Résoudre sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle suivante, où l'inconnue est y, fonction dérivable d'une variable réelle notée t :

$$2t(1-t)y' + (1-t)y = 1.$$

Exercice 120
Calculer :
a) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta \sin^2\theta}$ b) $\displaystyle\int (\operatorname{Arcsin} x)^2 \, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n}$ d) $\displaystyle\int \ln(x^2+2)\, dx$ e) $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}\, dx$ g) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}\, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi}$ i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\, dt$ j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}\, dx$

Exercice 121
On note, pour tous a et b réels :

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{(1-x^2)\, dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

1) Montrer que pour tous a et b, $I(a,b) = I(-b,-a)$.
2) Montrer que, si a et b sont de même signe :

$$I(a,b) = I(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}).$$

3) Montrer que pour tout a non nul, $I(a, \dfrac{1}{a}) = 0$.
4) Calculer $I(a,b)$. On traitera d'abord le cas où a et b sont tous deux strictement supérieurs à 1 et dans ce cas, on utilisera le changement de variable $t = x + \frac{1}{x}$.

Une dernière salve d'exercices, un peu plus théoriques, sur les applications linéaires

Exercice 122
Soit E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbf{K}$ et soit g une application linéaire de F vers E.
Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on pose $F((x, y)) = (x + g(y), y)$.
Montrer que F est une bijection linéaire de $E \times F$ sur lui-même.

Exercice 123
Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note φ et ψ les deux applications de E vers E définies respectivement (pour toute f de E) par :

$$\varphi(f) = f' \text{ et pour tout } x \in \mathbf{R}\, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

1) Vérifier que φ et ψ sont linéaires.

2) Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.

3) Discuter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité respectives de φ et ψ.

Exercice 124
On note E l'espace des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ qui sont par ailleurs 2π-périodiques.

1) Vérifier que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et que pour toute $f \in E$ on a également $f' \in E$.

2) Soit φ l'application de E vers E définie pour toute f par $\varphi(f) = f'$. Vérifier que φ est linéaire, puis déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 125
Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ engendré par les deux fonctions sin et cos.

1) Déterminer une base de H et préciser sa dimension.

2) On désigne par g, h et k les applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définies respectivement pour tout x réel par :

$$g(x) = \sin(2x), \qquad h(x) = \sin(x+1), \qquad k(x) = 1.$$

Les applications g, h et k sont-elles des éléments de H ?

3) Soit $F = \{f \in H \mid f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de F.

4) Soit φ l'application de H vers $\mathbf{R}^2$ définie pour toute $f \in H$ par

$$\varphi(f) = \left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Montrer que φ est une bijection linéaire.

5) Soit ψ l'application de H vers H définie pour toute $f \in H$ par $\psi(f) = f'$. Montrer que ψ est un automorphisme de H.

Exercice 126
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour F sous-ensemble de E, on note $F^\perp$ l'ensemble des formes linéaires définies sur E qui s'annulent sur F.

1) Montrer que pour toute partie F de E, l'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes linéaires sur E.

2) Montrer que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E,

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

3) On note n la dimension de E ; soit F un sous-espace de E, dont on note k la dimension. Exprimer la dimension de $F^\perp$ en fonction de n et k.