Feuille d'exercices n° 6
Probabilités

Exercice 1.
Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on suppose que trois événements A, B et C éléments de $\mathcal{A}$ vérifient les propriétés suivantes :

$$P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{2}{3} \qquad P(C) = \frac{13}{24} \qquad P(B|A) = \frac{5}{8} \qquad P(A|C) = \frac{4}{13} \qquad P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{24}.$$

1. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cap C)$, puis $P(A \cap B \cap C)$.
2. On suppose en outre qu'il est impossible que ni A, ni B, ni C ne soit réalisé. Quelle est la probabilité que deux exactement des événements A, B et C soient réalisés ?

Exercice 2.
On lance deux dés non truqués l'un après l'autre. On considère les événements suivants :
– A : « Le chiffre du premier dé est pair » ;
– B : « Le chiffre du deuxième dé est pair » ;
– C : « Les deux chiffres ont la même parité ».

1. Modéliser l'expérience aléatoire.
2. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
3. Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

Exercice 3.
1. Un joueur tire simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   – A : « le joueur a tiré 3 as »,
   – B : « le joueur a tiré 3 cartes de même valeur »,
   – C : « le joueur a tiré 3 cartes de même couleur »,
   – D : « le joueur a tiré 3 cartes de valeurs différentes »,
   – E : « le joueur a tiré un pique et un roi ».
2. Le joueur constitue maintenant une pioche, tire une carte, la remet dans la pioche et recommence 2 fois ces opérations. Déterminer à nouveau les probabilités des événements A, B, C, D et E.

Exercice 4.
Dans une ville, il y a trois centres de secours d'urgence. Cinq malades appellent le même jour un centre au téléphone après avoir choisi, au hasard, l'un des centres dans l'annuaire.

1. Modéliser l'expérience aléatoire. Donner l'univers (ou espace des réalisations) Ω associé à cette expérience aléatoire. Calculer le cardinal de Ω.
2. Quelle est la probabilité que les cinq malades appellent le même centre ?
3. Quelle est la probabilité que les trois centres soient appelés ?

Exercice 5.
Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ avec $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme. Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3\}$. Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas (mutuellement) indépendants.

Exercice 6.
On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite. On dispose de tests de dépistage de la maladie :

– si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%,
– si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probablité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probablité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probablité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probablité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Exercice 7.
On considère une succession de sacs qu'on désigne par $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ Au départ le sac S_1 contient deux jetons noirs et un jeton blanc, tous les autres sacs contiennent chacun un jeton noir et un jeton blanc.
On tire au hasard un jeton du sac S_1 que l'on place dans le sac S_2. Puis on tire au hasard un jeton du sac S_2 que l'on place dans le sac S_3 et ainsi de suite.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement « le jeton tiré du sac S_k est blanc » et $p_k = P(B_k)$ sa probabilité.

1. Calculer $P(B_2|B_1)$ et $P(B_2|\overline{B_1})$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre p_{n+1} et p_n.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = p_n - \frac{1}{2}$. Etudier la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de p_n en fonction de n, puis étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8.

1. On considère un ensemble Ω muni d'une probabilité P et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements tels que, pour tout $j = 1, \dots, n$, $P\left(\bigcap_{k=1}^{j} A_k\right) > 0$. Montrer que
$$\prod_{j=1}^{n-1} P\left(A_{j+1} \middle| \bigcap_{k=1}^{j} A_k\right) = \frac{P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)}{P(A_1)}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. On modélise l'expérience en construisant un ensemble Ω muni d'une probabilité P tel qu'à chaque étape les tirages soient uniformes.
   (a) i. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges au premier tirage.
       ii. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur au premier tirage.
   Pour tout $j = 1, \dots, n$, on note E_j l'événement « on obtient une boule de chaque couleur au j-ième tirage ».
   (b) i. Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2|E_1)$.
       ii. Montrer que, pour tout $j = 1, \dots, n-1$,
$$P\left(E_{j+1} \middle| \bigcap_{k=1}^{j} E_k\right) = \frac{2(n-j)^2}{(2n-2j)(2n-2j-1)}.$$
   (c) i. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?
       ii. Que devient cette probabilité quand n tend vers $+\infty$?
       On donne la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 9.

1. Une personne lance une pièce non truquée une fois. On note X le nombre de fois où elle obtient « pile ». Déterminer la loi de X.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une personne lance une pièce non truquée n fois consécutives. On note X le nombre de fois où elle obtient « pile ». Déterminer la loi de X.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alain et Bernadette lancent séparément chacun n fois une pièce non truquée. On note X_1 le nombre de « pile » obtenus par Alain et X_2 le nombre de « pile » obtenus par Bernadette. Déterminer la probabilité que $X_1 = X_2$.

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules dans cette urne, avec remise. On note X_i $(1 \leq i \leq n)$ le résultat du i-ème tirage.

1. La question posée est « Soit m un entier fixé $(1 \leq m \leq n)$, quelle est la probabilité pour que le plus gros numéro tiré vaille m ? »

   Retraduire cette question comme une question posée sous forme « Déterminer la loi de $\cdots$ »
2. Répondre à la question qu'on vient de poser.

Exercice 11.
On décrit le trafic dans une rue par l'hypothèse suivante : la probabilité qu'une voiture passe pendant une seconde donnée est $p \in]0,1[$; les passages de voitures à chaque seconde forment un système d'événements indépendants.

1. Un piéton encore leste peut franchir la rue si aucune voiture ne passe dans la seconde qui suit le début de sa traversée.

   Donner la loi de la variable T_1 « temps d'attente du piéton leste».
2. Un piéton moins leste ne peut franchir la rue que si aucune voiture ne passe dans les deux secondes qui suivent le début de sa traversée.

   Soit T_2 la variable « temps d'attente du piéton moins leste».

   Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(T_2 > n) = p\,P(T_2 > n-1) + (1-p)p\,P(T_2 > n-2)$.

   En déduire la loi de T_2.

Exercice 12. Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et p réel de $]0,1[$.

1. Soit X une variable aléatoire sur Ω régie par une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$P(X = n + k | X \geq k).$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω, indépendantes, toutes deux régies par une loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{1}{2})$. Déterminer la loi de $\max(X, Y)$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Soit $(X_k)_{1 \leq i \leq N}$ une famille de variables aléatoires définies sur Ω. On suppose les $(X_k)_{1 \leq i \leq N}$ indépendantes et on suppose qu'elles sont toutes régies par une même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.
   (a) Calculer la loi de $S_2 = X_1 + X_2$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer par récurrence sur b que pour tout $b \geq a + 1$:

$$\sum_{r=a}^{b-1} \binom{r}{a} = \binom{b}{a+1}.$$

   (c) Pour tout k avec $2 \leq k \leq N$, montrer que la loi de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ est donnée par : pour $n \geq k$

$$P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 13.
Soit $N, M \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules blanches et M boules noires.

1. On tire n boules avec remise après chaque tirage (n peut donc être aussi grand que l'on veut). On note X la variable « nombre de boules blanches tirées ». Déterminer la loi de X.

2. On tire maintenant n boules sans remise ($n \leqslant N+M$). On note Y la variable « nombre de boules blanches tirées ».
   (a) Montrer que
   $$P(Y=k)=\begin{cases}\frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant N \text{ et } 0 \leqslant n-k \leqslant M \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
   (b) On suppose maintenant que n est fixé et que N et M tendent vers l'infini avec la contrainte $\frac{N}{N+M} \to p \in [0,1]$.
   Montrer que $P(Y=k) \to \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Exercice 14.
Un centre de production fabrique des puces électroniques dont certaines peuvent être défectueuses. Au bout de la chaîne de fabrication des puces, celles-ci sont contrôlées par un testeur électronique. Malheureusement, à ce stade de la fabrication, avant la soudure des connexions et la mise en boîtier, il n'est pas possible de réaliser un test exhaustif. En conséquence, une puce mauvaise est déclarée mauvaise par le testeur avec une probabilité $\beta < 1$. Qui plus est, une puce bonne n'est déclarée bonne par le testeur qu'avec une probabilité $\gamma \leqslant 1$. Le responsable de l'atelier des puces ne connaît pas la probabilité α qu'une puce soit mauvaise.
On définit les événements suivants :
- C_1 : « la puce est bonne »,
- C_0 : « la puce est mauvaise »,
- T_1 : « la puce est déclarée bonne par le testeur »,
- T_0 : « la puce est déclarée mauvaise par le testeur ».

1. (a) Exprimer $P(C_0)$, $P(T_0|C_0)$, $P(T_1|C_1)$, $P(T_0|C_1)$ et $P(C_1)$ en fonction de α, β et γ.
   (b) En déduire la probabilité qu'une puce soit déclarée mauvaise par le testeur.
   (c) *Application* : Des études antérieures ont montré que, pour le testeur utilisé, $\beta = 0.9$ et $\gamma = 0.95$. Représenter graphiquement $P(T_0)$ en fonction de α et interpréter les résultats pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.
2. (a) Exprimer en fonction de α, β et γ la probabilité qu'une puce déclarée mauvaise par le testeur soit réellement mauvaise. En déduire la probabilité qu'une puce déclarée mauvaise par le testeur soit bonne.
   (b) *Application* : $\beta = 0.9$ et $\gamma = 0.95$. Représenter graphiquement les deux probabilités précédentes en fonction de α et interpréter.
3. Exprimer la probabilité qu'une puce déclarée bonne par le testeur soit mauvaise.
   Remarque : le rapport $R = \dfrac{P(C_0)}{P(C_0|T_1)}$ *peut servir à exprimer l'efficacité du testeur.*

Exercice 15.
On lance deux dés équilibrés. On modélise cette expérience aléatoire comme suit :

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2,\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),\ P = \text{probabilité uniforme sur } \Omega.$$

On considère X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des deux lancers, et Y la variable aléatoire égale au maximum des résultats des deux lancers. On note V le couple de variables aléatoires (X, Y).

1. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) > Y(\omega)$. Montrer que $V(\Omega) \neq X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple $V = (X, Y)$ et la représenter sous forme d'un tableau.
3. Déterminer les lois marginales de $V = (X, Y)$.
4. Déterminer la loi de X sachant que $\{Y = 4\}$ est réalisé (loi conditionnelle).