Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
Analyse 2 – Cursus préparatoire, 1ère année

Feuille d'exercices n° 5
Séries numériques, intégrales généralisées

Exercice 1. (*Séries à termes positifs et critères de comparaison*)
Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les différents cas suivants :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{-\sqrt{n}}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(f) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{2n^2+3n+1}\right)$

Exercice 2.
Etudier, selon la valeur des paramètres a et b strictement positifs, la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n\, 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}.$$

Exercice 3. (*Convergence absolue et critères de comparaison*)
Montrer que la série de terme général u_n converge absolument dans les différents cas suivants :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n)e^{-n}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1+2\sin(2n)}{n^{6/5}}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)$.

Exercice 4.
Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt,\ a>0$

(b) $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

(c) $I_3 = \displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt$

(d) $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt$

Exercice 5. (*Intégrales généralisées de fonctions positives et critères de comparaison*)
Etudier la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}}dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt,\ \alpha\in\mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t^\alpha}dt,\ \alpha\in\mathbb{R}$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^{1/4}-t^{1/4}}{t^{1/3}}dt$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{t}{e^{\sin t}-1}dt$

Exercice 6. (*Intégrales de Bertrand*)
Soit a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^a(\ln t)^b}dt$.
On pourra :

1. Lorsque $a = 1$, calculer explicitement $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t(\ln t)^b} dt$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.
2. Lorsque $a \neq 1$, utiliser les fonctions de référence mentionnées en cours et le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Exercice 7. (*Intégrales absolument convergentes*)
Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$, $\alpha > 1$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$, $\alpha > 1$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(\sqrt{t}e^{-2t})}{(1+t)\sqrt{|1-t|}} dt$

Exercice 8. (*Fonction Gamma d'Euler*)
On considère la fonction $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Donner le domaine de définition de Γ.
2. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9. (*Des erreurs à ne pas commettre*)

1. Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge.}$$
2. Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que f ne tende pas vers 0 à l'infini mais dont l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Exercice 10. (*Comparaison série-intégrale*)

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n).$$
   (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,
   $$\int_1^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(x)dx.$$
   (c) En déduire que la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

   On peut obtenir un encadrement similaire et la même conclusion dans le cas où f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. *Exemples.*
   (a) Etudier la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$.
   (b) Montrer l'équivalent : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 11. (*Une autre comparaison série-intégrale*)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}dx, \quad v_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}dx.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}dx$.
2. En utilisant le changement de variable $t = \tan x$, calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq u_n \leq v_n$.
4. En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$, puis la nature de la série $\sum u_n$.
5. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}dx$.

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f'(x))^2dx$ convergent.

1. Montrer pour tout $x \geq 1$ l'identité :

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x-1}^{x} (t-x+1)f'(t)\,dt.$$

2. Montrer pour tout $x \geq 1$ la majoration :

$$|f(x)| \leq \int_{x-1}^{x} |f(t)|\,dt + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_{x-1}^{x} (f'(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

3. Conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.