Feuille d'exercices n° 4

Intégration sur un segment au sens de Riemann,
Calculs d'intégrales, primitives

Exercice 1. (*Primitives de fractions rationnelles*)
Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^4(x-1)^3}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

(m) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx$

Exercice 2. (*Calculs d'intégrales, intégration par parties, changement de variable*)

1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi$ (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

2. Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int (\mathrm{Arcsin}\,x)^2\,dx$

(f) $\displaystyle\int \ln(x^2+2)\,dx$

Exercice 3. (*Encore des calculs*)
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{1+\sin(2x)}dx$ (poser $u=\tan x$)

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5\,\mathrm{ch}\,x+3\,\mathrm{sh}\,x+4}dx$ (poser $t=e^x$)

(c) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ (poser $x=\cos\theta$)

(d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t=\sqrt{x+1}$)

(e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t=\sqrt{2}/x$)

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+2\cos x}dx$ (poser $u=\tan(\frac{x}{2})$)

(g) $\displaystyle\int_2^3 x^2\ln(x^6-1)\,dx$ (poser $t=x^3$)

(h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{(\mathrm{sh}\,t+\mathrm{ch}\,t)^n}$, $n\in\mathbb{N}$

(j) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$

(m) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\,dt$

Exercice 4. En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$I = \int_0^\pi x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Exercice 5. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1} B(p-1,q+1)$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $B(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1).$$
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$
5. Montrer que $\dfrac{2^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire que $1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}$ tend vers e^2 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. (*Fonctions en escalier*)
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$.

1. Montrer que le produit fg est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
2. On suppose ici que g ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que $\dfrac{f}{g}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
3. On suppose ici que $g([a,b]) \subset [a,b]$ de sorte que $f \circ g$ est bien définie sur $[a,b]$. La composée $f \circ g$ est-elle une fonction en escalier sur $[a,b]$?

Exercice 8. (*Intégrales et parité*)
Soit $a > 0$. Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, intégrable au sens de Riemann sur $[-a,a]$.

1. Montrer que si f est paire, alors
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$
2. Montrer que si f est impaire , alors
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Exercice 9. (*Continuité uniforme*)

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue.*

1. Montrer que si f est de plus à valeurs positives, et telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
2. Montrer que

$$f \text{ est de signe constant sur } [a,b] \text{ si et seulement si } \int_a^b |f(t)|dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|.$$

Exercice 11. Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\,d\varphi.$$

3. *Pour aller plus loin.* Le résultat de la première question est-il encore vrai si l'on suppose seulement f continue par morceaux sur $[a, b]$? f bornée et intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$?

Exercice 12. (*Des majorations d'intégrales*)

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} (\sin x)^n dx = 0$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = 0$.
   Indication. On pourra décomposer l'intégrale en utilisant la relation de Chasles.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx = 0$.
   Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 13. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. En effectuant une intégration par parties, démontrer que nI_n tend vers $f(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $x > 0$, $F(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$.

Montrer que $\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 15.
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Pour toute fonction f bornée, intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, on note $N(f) = \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}$.

1. Justifier que $N(f)$ est bien défini dans $\mathbb{R}^+$ pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.
2. Montrer que si f est bornée, intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
3. Montrer que si f et g sont bornées, intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g).$$

4. Montrer que si f est bornée, intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sqrt{b-a}\, N(f).$$

5. Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors $N(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$.

Exercice 16. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer le résultat suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt)dt = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt)dt = 0.$$

Exercice 17. (*Intégrales de fonctions périodiques*)
Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique.

1. Montrer que pour tous réels a et b,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx.$$

2. Montrer que pour tout réel a,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Exercice 18.

1. On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par : pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt.$$

Montrer que f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.
2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^{x^2} (\text{Arctan}(t + x))^2\, dt.$$

Montrer que g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 19.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^2)dt$.
2. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1 + t^2)^{1/n} dt$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.
Indication. On pourra écrire une majoration de $|(1 + u)^{1/n} - 1|$ *pour* $u \geq 0$.
3. (a) À l'aide du développement de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall u \geq 0, \quad |e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2} u^2 e^u.$$

(b) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\left|(1+t^2)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

(c) En déduire un équivalent simple de $u_n - 1$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 20.
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(0) = \ln 2, \text{ et } \forall x \neq 0, \; F(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $F(x) = \ln 2 - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\cos(t)}{t} dt$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout t réel, on a :

$$0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}.$$

   En déduire que pour tout x réel, on a l'inégalité : $|F(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}x^2$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra intégrer par parties).
5. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$.
6. Montrer que F est également dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.

Exercice 21.
On définit une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \qquad \text{pour } t \in]0,1[, \; f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

On définit également une application $F :]0,1[\to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4. (a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln(2)$.

   (b) Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$.

   (c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} F(x)$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0$.
5. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

   (b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 22.
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} \qquad \text{pour } t \neq 0, f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que f est une fonction continue. Est-elle dérivable ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (sans présupposer son existence).

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$
Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée. Montrer qu'elle est impaire.
4. Pour $x > 0$, montrer les inégalités
$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}dt \leq F(x) \leq x$$
et en déduire que
$$x - \arctan(2x) + \arctan(x) \leq F(x) \leq x.$$

Exercice 23. (*Sommes de Riemann*)
Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies pour $n \geq 1$:

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

2) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin(k\pi/n)$

3) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n}$

4) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

5) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+\cos(k)}{k^2+n^2}$

6) $u_n = \dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} + \dfrac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$ avec α, β deux nombres réels strictement positifs.

Exercice 24.

1. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par : pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.
2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par : pour tout $x \in [0,1]$,
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ \text{pgcd}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$
est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.

Exercice 25. (*Calcul d'aire*)
On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq e^{x/2}$.
2. Dessiner D.
3. Calculer l'aire de D.