
Feuille d'exercices n° 3
UTILISATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUIVALENTS ET AUTRES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES,
FORMULES DE TAYLOR

Exercice 1.

1. *Un exemple.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant le développement limité suivant au voisinage de 1 :
$$f(x) = 1 + 2(x-1) - 4(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right).$$
   (a) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse 1 ?
   (b) Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage du point d'abscisse 1 ?
2. Soit $m \geq 2$ un entier, I un intervalle ouvert, x_0 un point de I et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, qu'on suppose m fois dérivable au point x_0.
   On note Δ la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$.
   On suppose qu'il existe un entier $r \in \{2, \dots, m\}$ tel que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$ et on note N le plus petit entier $r \in \{2, \dots, m\}$ tel que $f^{(r)}(x_0) \neq 0$.
   (a) i. Écrire une équation de Δ regroupée sous forme $y = g(x)$.
   ii. Écrire un équivalent simple de $f(x) - g(x)$ pour x tendant vers x_0.
   (b) Montrer que si N est pair et si $f^{(N)}(x_0) > 0$ (resp. < 0), il existe un $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset I$ et que le graphe de la restriction de f à $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ est inclus dans le demi-plan limité par Δ et situé au-dessus (resp. au-dessous) de celle-ci.
   (c) Que peut-on dire quand N est impair ?
   (d) Dans cette question, on suppose que $f'(x_0) = 0$. Montrer que si N est pair, f admet un extremum local strict en x_0 et que si N est impair, elle n'admet pas d'extremum local en x_0.

Exercice 2. En utilisant des développements asymptotiques, étudier les branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$;
2. $f_2(x) = x^3 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$;
3. $f_3(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 1}$;
4. $f_4(x) = x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 3. Un véhicule se déplace dans le plan. On suppose que sa position à l'instant $t > 0$ est donnée par les formules :
$$x(t) = 2t - t^2 \qquad y(t) = 2t + \frac{1}{t^2}.$$

1. Montrer que $t \mapsto x(t)$ est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.
2. En déduire que la trajectoire du mobile pour $t \in]0; 1]$ (resp. $t \in [1; +\infty[$) est un graphe de fonction continue qu'on notera $y_-(x)$ (resp. $y_+(x)$).
3. (a) Déterminer le développement limité de $x(t)$ à l'ordre 2 au voisinage de $t = 1$.

(b) Déterminer le développement limité de $y(t)$ à l'ordre 3 au voisinage de $t = 1$.

(c) Déduire de ces deux expressions un développement asymptotique de $y_-(x)$ (resp. $y_+(x)$) au voisinage de $x = 1$, puis un dessin approximatif de la trajectoire du véhicule aux instants proches de $t = 1$.

Exercice 4. Soit $a > 0$.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5. Montrer que l'on a :
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$
2. En déduire l'encadrement :
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 5.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour le logarithme népérien sur l'intervalle $[1, 2]$ avec le reste à l'ordre 3. En déduire que $\frac{1}{2} < \ln 2$.
2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, avec le reste à l'ordre 4. En déduire, à l'aide de la question précédente, que :
$$\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}.$$

Exercice 6.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26, avec un reste à l'ordre 2.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 7. Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrer l'encadrement suivant :
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$
En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 8.

1. Montrer que pour tout x réel tel que $0 < x < 1$, on a l'inégalité : $\operatorname{ch} x < 1 + x^2$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités :
$$0 < (1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < \frac{5x^3}{81}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note $M_0 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $h > 0$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 10. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et soit M une constante strictement positive. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a d'une part : $0 \leq \varphi(t)$ et d'autre part : $\varphi''(t) \leq M$.

1. Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(t) + s\varphi'(t) + \dfrac{s^2}{2}M \geq 0$.
2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $|\varphi'(t)| \leq \sqrt{2M}\sqrt{\varphi(t)}$.
3. Peut-on améliorer la constante dans l'inégalité précédente ?

Exercice 11. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose en outre que f est dérivable en 0 et en 1, et que $f'(0) = f'(1) = 0$.
On désigne par g l'application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $t \in]0,1[$ par

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t)-1}{t-1}.$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
2. En déduire qu'il existe un $\alpha \in]0,1[$ tel que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1},$$

   puis montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
3. On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
   (a) On suppose ici que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Écrire la formule de Taylor pour f sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et en déduire l'existence d'un x dans $]0,\alpha[$ tel que $f''(x) \geq 4$.
   (b) On suppose ici que $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Par une méthode analogue, montrer cette fois l'existence d'un y dans $]\alpha,1[$ tel que $f''(y) \leq -4$.
   (c) En conclure qu'il existe $b \in]0,1[$ tel que $|f''(b)| \geq 4$.

Exercice 12.

1. Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'il existe un unique $\theta_x \in]0;1[$ tel que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta_x x).$$

2. En écrivant par ailleurs la formule de Taylor-Lagrange avec reste à l'ordre 5 pour sin entre 0 et x, montrer que θ_x admet une limite quand x tend vers 0^+ et préciser cette limite.

Exercice 13. (*Méthode de Newton*)
Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$.
La méthode de Newton est un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de cette solution x à $f(x) = 0$. Pour cela, on construit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit (les hypothèses nécessaires à la définition de $(y_n)_n$ seront précisées plus loin) :

$$y_0 \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \qquad (1)$$

1. Faire un dessin illustrant le principe de la méthode de Newton (dessiner le graphe d'une telle fonction f et quelques termes de la suite $(y_n)_n$).

2. *Préliminaires.*
   (a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $r_0 < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} \leq r_n^2$. En utilisant la suite définie par $s_0 = r_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n^2$, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n \leq (r_0)^{2^n},\ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$
   (b) Justifier l'existence de $M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.
   (c) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $m_1 > 0$ tel que $m_1 = \min_{t\in[x-\eta,x+\eta]} |f'(t)|$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons y_n bien défini et $f'(y_n) \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel c_n dans l'intervalle fermé de bornes x et y_n tel que
   $$y_{n+1} - x = \frac{f''(c_n)}{2f'(y_n)}(y_n - x)^2.$$
4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \varepsilon < \min\left(\eta, \dfrac{2m_1}{M_2}\right)$. Soit $y_0 \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.
   (a) Montrer qu'alors la suite $(y_n)_n$ définie par (1) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.
   (b) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{M_2}{2m_1}|y_n - x|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} \leq r_n^2$. En déduire que
   $$\lim_{n\to+\infty} y_n = x,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ |y_n - x| \leq |y_0 - x|^{2^n}.$$
5. *Un exemple : calcul approché de* $\sqrt{2}$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 - 2$.
   (a) Justifier qu'il existe un unique $x > 0$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $x \in]1, \frac{3}{2}[$.
   (b) On fixe $y_0 = 1$. Ecrire la définition de la suite $(y_n)_n$ dans ce cas. Justifier que la suite $(y_n)_n$ est bien définie et qu'elle converge vers x.
   (c) Quel est le nombre minimal d'itérations nécessaires pour le calcul d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-15} près à l'aide de cette suite ? Calculer ces quelques termes.