Feuille d'exercices n° 2
Équivalents, développements limités

Exercice 1. Pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

(a) $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$,

(b) $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$,

(c) $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+2x$,

(d) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,

(e) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x$,

(f) $e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$,

(g) $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,

(h) $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$,

Exercice 2. Donner pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un équivalent simple :

1. $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 0$,
2. $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to +\infty$,
3. $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 2$,
4. $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 1$,
5. $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln x)^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 5^{x+1}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3. (*Croissances comparées et équivalents*)
Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

1. $f_1(x) = x + \cos x$,
2. $f_2(x) = x + \sin x$,
3. $f_3(x) = \sqrt{x} + \ln x$,
4. $f_4(x) = xe^x$,
5. $f_5(x) = x^4 + e^x$,
6. $f_6(x) = x^2 + \sin x$,
7. $f_7(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$,
8. $f_8(x) = \operatorname{ch} x$,
9. $f_9(x) = \operatorname{sh} x$.

Exercice 4. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^4 + x^3 - x,\ \ g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + 1,\ \ h(x) = (x-1)^3.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f et de h.
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f + g$.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de fg.
6. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{g}$.

Exercice 5. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, et quatre fois dérivables au voisinage de 0 dont les développements limités en 0 à l'ordre 4 sont donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4),$$
$$g(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

1. Donner les valeurs de $g''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
2. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :
   (a) fg à l'ordre 3,

(b) $\dfrac{g}{f}$ à l'ordre 3,
(c) $f \circ g$ à l'ordre 2,
(d) $\ln f$ à l'ordre 2,
(e) la primitive de f qui vaut 1 en 0, à l'ordre 4.

3. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{xf(x)}{g(x)}$ en 0 à l'ordre le plus élevé possible.
4. Peut-on déterminer un développement limité en 0 de $g \circ f$? $\ln g$?
5. À quel ordre maximal peut-on calculer le développement limité de f' en 0 ? Donner ce developpement limité.
6. Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie au voisinage de 1. Déterminer le développement limité de f^{-1} au voisinage de 1 (on justifiera d'abord son existence).

Exercice 6. Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

(a) $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$,
(b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $n = 6$,
(c) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh} x)$ et $n = 4$,
(d) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$,
(e) $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ et $n = 4$,
(f) $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$ et $n = 3$,
(g) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x}$ et $n = 3$,
(h) $f(x) = \tan x$ et $n = 5$,
(i) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{e^x \sin x}$ et $n = 2$,
(j) $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ et $n = 3$,
(k) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{(1 + x)^2}$ et $n = 3$,
(l) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1 + x}\right)$ et $n = 4$,
(m) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh} x}$ et $n = 4$.

Exercice 7. Déterminer les réels a et b pour que $\cos x - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible au voisinage de 0.

Exercice 8.

1. Déterminer $\arcsin^{(6)}(0)$ (sans calculer les dérivées successives de arcsin).
2. Faire un développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. En déduire un développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction arcsin.
4. Déterminer $\arcsin^{(7)}(0)$.

Exercice 9. Soit a et m deux réels. Etudier le comportement, quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + x} - mx\sqrt{x + 2}.$$

Discuter suivant les valeurs de a et m, et donner un équivalent de $f(x)$.

Exercice 10. Etudier la limite de f en a lorsque

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x(x - 3)}$ et $a = +\infty$,
(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1 + x}}$ et $a = +\infty$,
(c) $f(x) = (\pi - 2x)\tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$,
(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} - \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x^4 + x^3}}$ et $a = +\infty$,
(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$ et $a = e$.

Exercice 11. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence) :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \sin(2x)}{x(1-\cos(3x))}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{ch} x\right)^{1/x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

Exercice 12. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}_+$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$.

Exercice 13. Calculer un développement limité ou asymptotique de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,
2. $f(x) = \sqrt{2+x}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3,
3. $f(x) = \ln(2+x)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2,
4. $f(x) = \sin x$ où x tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3,
5. $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 3,
6. $f(x) = \sqrt{x^4+x+1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs,
7. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 14. Calculer les limites suivantes (en montrant leur existence) :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^3-2x}{x-1}} - x$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{6};0\right[\cup \left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-2\sin x)}{\operatorname{sh}(2x)}$. En écrivant un développement limité de f en 0, montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 16. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arctan x - \arctan(x+1).$$

On cherche à déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$.
2. *Première méthode.* En remarquant que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \tan(f(x))$ quand x tend vers $+\infty$, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$.

   Indication. On pourra montrer et utiliser la formule suivante $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$.
3. *Deuxième méthode.* Retrouver l'équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ en utilisant que pour tout $x > 0$, $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 17. Soit f et g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \ln(1 - x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

1. Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5, quand x tend vers 0.
2. En déduire l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[$, $f(x) < g(x)$.

Exercice 18. Soit u et v les fonctions numériques définies par $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = \sin x$. On note $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

1. Justifier que f et g sont définies au voisinage de 0.
2. Établir des développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions f et g.
3. En déduire l'existence d'une constante $k \in \mathbb{R}$ que l'on explicitera telle que $f(x) - g(x) \underset{x \to 0}{\sim} kx^4$.

Exercice 19. (*Différences finies*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \longrightarrow f''(x).$$