Université Claude Bernard - Lyon 1
Analyse 2 – Cursus préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année

Semestre de printemps 2014-2015

Feuille d'exercices n° 1
CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ
FONCTIONS RÉCIPROQUES, TRIGONOMÉTRIE

Analyse réelle, continuité, dérivabilité

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

1. Montrer que, si $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors f possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que $[0,1] \subset f([0,1])$.
3. On suppose que $f([0,1]) \subset [0,1]$, $g([0,1]) \subset [0,1]$ et que, de plus $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que $f > g$ ou $f < g$, c'est-à-dire
   $$\Big(\forall x \in [0,1],\ f(x) > g(x)\Big) \text{ ou } \Big(\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)\Big).$$
   (b) Soit x_0 un point fixe de f. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f(x_n)$.
      ii. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Conclure.

Exercice 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On pose
$$A = \left\{ \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\}.$$
Montrer que A possède des bornes inférieure et supérieure et les déterminer.

Exercice 5. Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (1 + |x|)e^{-|x|}$;
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition sur n ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. À quelle condition sur n cette dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 7. (*Interpolation*)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que f'' soit continue. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit $\phi_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \alpha + \beta(x - a)$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi_{\alpha,\beta}(a) = f(a)$ et $\phi_{\alpha,\beta}(b) = f(b)$.
   Dans la suite, α et β vérifient cette propriété.
2. Montrer que si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable qui s'annule au moins trois fois, alors g'' s'annule au moins une fois.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{a, b\}$, il existe $\gamma_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \phi_{\alpha,\beta}(x) + \gamma_x (x-a)(x-b)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - (\alpha + \beta(x-a))| \ \leq \ |(x-a)(x-b)| \ \frac{1}{2} \max_{[0,1]} |f''|.$$

Exercice 8.

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^x - 1 > x > 0$.
   Indication : on pourra au choix étudier les variations d'une fonction bien choisie, appliquer le théorème des accroissements finis ou écrire $e^x - 1$ comme une intégrale.
   (b) En déduire que si $x \geq 0$ vérifie $x(e^x - 1) = x^2$, alors $x = 0$.
2. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{e^{u_n} - 1}$.
   (a) Montrer que (u_n) est décroissante.
   (b) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 9.

1. Montrer que l'équation (E) : $2\ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2, +\infty[$. On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in]5, 6[$.
2. Afin de déterminer une approximation de a, on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi : [2, +\infty[\to [2, +\infty[, \ x \mapsto 2\ln x + 2$.
   (a) i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [5, 6]$.
   ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   iii. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est a.
   (b) i. Montrer que, pour tout $x \in [5, 6]$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.
   ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - a| \ \leq \ \frac{2}{5} \ |u_n - a|.$$

   iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Définition et premières propriétés des fonctions hyperboliques réciproques

Exercice 10. (*La fonction* Argsh)

1. Montrer que la fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et continue. On note Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

3. Tracer l'allure du graphe de Argsh.
4. Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

Exercice 11. (*La fonction* Argch)

1. Montrer que la fonction ch réalise une bijection continue de $\mathbb{R}^+$ sur $[1,+\infty[$. On note Argch : $[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ sa fonction réciproque.
2. Montrer que pour tout $y \in [1,+\infty[$,
$$\operatorname{Argch} y = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right).$$
3. Tracer l'allure du graphe de Argch.
4. Montrer que Argch est dérivable sur $]1,\infty[$ et que pour tout $y>1$,
$$\operatorname{Argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 12. (*La fonction* Argth)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} < 1$.
2. Montrer que la fonction th : $\mathbb{R} \to]-1,1[$ est bijective et continue. On note Argth $:]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.
3. Montrer que pour tout $y \in]-1,1[$,
$$\operatorname{Argth} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$
4. Tracer l'allure du graphe de Argth.
5. Montrer que Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $y\in]-1,1[$,
$$\operatorname{Argth}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

Trigonométrie hyperbolique

Exercice 13. Montrer les formules suivantes, valables pour tous réels x, y :

1. $\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}^2(y) = \operatorname{sh}^2(x)+\operatorname{ch}^2(y) = \operatorname{ch}(x+y)\ \operatorname{ch}(x-y)$,
2. $\operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y) = 2\ \operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$,
3. $\operatorname{ch}(x)-\operatorname{ch}(y) = 2\ \operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$,
4. $\operatorname{ch}(x\pm y) = \operatorname{ch}(x)\ \operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{sh}(x)\ \operatorname{sh}(y)$.

Exercice 14. Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x et y : $\begin{cases} \operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y)=3 \\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y)=2 \end{cases}$.

Exercice 15.

1. Calculer $\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :
$$2\ \operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x) = \sqrt{3}\ \operatorname{ch}(5x).$$
Indication : utiliser une des formules de l'exercice 13.

Exercice 16. (*Linéarisation*) Soit $u \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\operatorname{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u puis en fonction de termes du type $\operatorname{ch}(ku)$, $k \in \mathbb{N}$.
2. Même question avec $\operatorname{sh}^4(u)$.

Manipulations des fonctions réciproques

Exercice 17. Calculer les quantités suivantes :

1. $\operatorname{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$
4. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$
5. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{82\pi}{11}\right)\right)$
6. $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(1))$
7. $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(1-\ln 5))$.

Exercice 18. Montrer que l'équation $\operatorname{Argsh} x + \operatorname{Argch} x = 1$ admet une unique solution réelle, puis la déterminer.

Exercice 19. Donner le domaine de définition de la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \operatorname{Argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right],$$

et simplifier son expression.

Exercice 20. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$ et en déduire une expression plus simple de chacune des restrictions de f aux trois intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$.

Exercice 21.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x, on ait l'identité $16x^6+24x^4+9x^2+1 = (x^2+1)P(x)$ et expliciter ce polynôme.
2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \operatorname{Argsh}(3x+4x^3)$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
   (b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 22. Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a+ib$ qui vérifie $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. En se penchant sur le triangle de sommets 0, a et $a+ib$, montrer que :

$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{b}{a}.$$

En déduire que le réel

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$$

est un argument du nombre complexe $(2+i)(5+i)(8+i)$. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire une expression simple de :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.$$

Exercice 23.

1. Montrer que $0 \leq \operatorname{Arcsin}\dfrac{4}{5}+\operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13} \leq \dfrac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\dfrac{4}{5}+\operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13}$.