Feuille d'exercices n° 9 : Intégrales

Exercice 9.1($*$) Intégrales, parité et périodicité.

1. Soit $a > 0$. Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.
   (a) Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que si f est impaire , alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.
   (a) Montrer que pour tous réels a et b, $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que pour tout réel a, $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9.2 Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est à valeurs positives, et telle que $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
2. Montrer que f est de signe constant sur $[a, b]$ si et seulement si $\displaystyle\int_{a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

Exercice 9.3 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) ($*$) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) ($*$) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$
(c) ($*$) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$
(e) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$
(f) ($*$) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$
(g) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$
(h) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$
(i) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$
(j) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$
(k) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.4($*$) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$
(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$
(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
(e) $\displaystyle\int_0^{1/2} (\operatorname{Arcsin} x)^2\,\mathrm{d}x$
(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.5($*$) En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$I = \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9.6($*$) Primitives de polynômes et fractions rationnelles en cos et sin.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{2k} x = (1-\sin^2 x)^k$, déteminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^{2k+1} x$.
2. Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^4 x$. *Indication : on pourra linéariser* $\cos^4 x$.

3. On veut calculer les primitives d'une fonction de la forme $R(\cos x, \sin x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables.
   Le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ permet toujours de se ramener au calcul des primitives d'une fraction rationnelle en t. Mais les calculs sont souvent assez lourds (et le degré du dénominateur assez élevé). On peut dans certains cas utiliser un autre changement de variable, donné par les *règles de Bioche* :
   — si $R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$, alors on pose $t = \sin x$;
   — si $R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $-x$, alors on pose $t = \cos x$;
   — si $R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $x + \pi$, alors on pose $t = \tan x$.
   Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (c) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+2\cos x}\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$

   (b) $(*)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x+2\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.7 Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $B(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 9.8(∗) On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq e^{x/2}$.
2. Dessiner D.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 9.9 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \cos\theta$)

(c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$)

(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t = \sqrt{2}/x$)

(e) $\displaystyle\int_2^3 x^2\ln(x^6-1)\,\mathrm{d}x$ (poser $t = x^3$)

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

(h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$

(j) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 9.10(∗)

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x = 0$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 9.11 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \longrightarrow f(1)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.