Feuille 6
Nombres réels et suites

Exercice 6.1($*$) Déterminer (lorsqu'ils existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 < 2\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}^*\right\} \quad ; \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \ : \ n, p \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

Exercice 6.2

1. Pour $x, y \in \mathbf{R}^{+*}$, montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.
2. Déterminer $\inf \left\{(x_1 + \cdots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \ : \ x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^{+*}\right\}$. Cet infimum est-il un minimum ?

Exercice 6.3 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une application bornée. Montrer que $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \inf\limits_{y \in \mathbf{R}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{y \in \mathbf{R}} \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x, y)$

Exercice 6.4 Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ une application croissante.

1. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \leqslant x\}$ admet une borne inférieure b.
2. Montrer que $f(b) = b$.

Exercice 6.5($*$) Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites u, v et w de termes généraux

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} \quad ; \quad v_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n) \quad \text{et} \quad w_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}\right).$$

Exercice 6.6 Montrer que la suite de terme général $w_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ diverge.

Exercice 6.7 Étudier la suite définie récursivement par $u_0 \in \mathbf{C}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u_n})$.

Exercice 6.8 Soit $a \in \mathbf{C}$, et u la suite définie par $u_0 \in \mathbf{C}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite u converge vers 0.

Exercice 6.9($*$) Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Montrer que u converge.
2. Donner une exemple de suite telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent mais $(u_k)_k$ diverge.
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que u converge.

Exercice 6.10($*$) Déterminer l'existence et la valeur des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 6.11 On dit qu'une suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall m, n \geqslant N, |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

2. (a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   (b) En déduire que toute suite de Cauchy converge.

Exercice 6.12(∗) Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On dit que $\lambda \in \mathbf{R}$ est une *valeur d'adhérence* de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers λ.

1. Déterminer les valeurs d'adhérence d'une suite convergente.
2. Déterminer les valeurs d'adhérences des suites définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.
3. Donner un exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.
4. Soit v une suite réelle bornée qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que v converge.

Exercice 6.13(∗) Soit u une suite. On définit une suite S par $S_n = \frac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}$.

1. (a) On suppose que u tend vers 0. Montrer qu'alors $S_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.
   (b) En déduire que, si u est convergente, alors S converge et a la même limite que u.
2. Si $u_n = (-1)^n$, montrer que la suite S converge.
3. Si $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, montrer que $S_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.