Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Corps commutatifs

Formellement, la définition d'un espace vectoriel nécessite de préciser au-dessus de quel *corps* l'espace vectoriel est défini. Précisons la définition d'un corps.

Définition 2.1. Un corps $\mathbb{K}$ est la donnée d'un ensemble K, et de deux opérations $+, .$ avec les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{K}$ on a $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x + y = y + x$, il existe un élément $0 \in K$ tel que $0 + x = x + 0 = x$ pour tout $x \in K$, et pour tout $x \in \mathbb{K}$ il existe $y \in \mathbb{K}$ tel que $x + y = y + x = 0$ (un tel y est nécessairement unique).
2. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{K}$ on a $x.(y.z) = (x.y).z$, $x.y = y.x$, il existe un élément $1 \in K \setminus \{0\}$ tel que $1.x = x.1 = x$ pour tout $x \in K$, et pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ il existe $y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $x.y = y.x = 1$ (un tel y est nécessairement unique)
3. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{K}$ on a $x(y + z) = xy + xz$ et $(x + y)z = xy + yz$.

Dans ce cours, vous pouvez oublier cette définition : les seuls corps que nous allons rencontrer sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (munis de leurs opérations usuelles) ; dans la suite des notes, à chaque fois qu'on écrira « soit $\mathbb{K}$ un corps », on aura en tête un de ces trois exemples.

2.2 Espaces vectoriels ; combinaisons linéaires

Définition 2.2. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un ensemble non vide E muni d'une loi d'addition $+ \colon E \times E \to E$ et d'une loi externe (multiplication d'un élément de E par un élément de $\mathbb{K}$) $\cdot$ de $\mathbb{K} \times E$ vers E avec les propriétés suivantes :

1. L'addition est *commutative* (pour tout $u, v u + v = v + u$) et *associative* (pour tout u, v, w $u + (v + w) = (u + v) + w$).
2. L'addition admet un *élément neutre* noté 0_E, qui est tel que pour tout $u \in E$ on a $u + 0_E = 0_E + u = u$; et pour tout u il existe v tel que $u + v = 0_E$ (notons qu'un tel v est unique et qu'on a aussi $v + u = 0_E$; on note $v = -u$).
3. L'addition et la multiplication sont compatibles, c'est-à-dire que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tout $u, v \in E$ on a :
   (a) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
   (b) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
   (c) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
   (d) $1u = u$.

Fréquemment, les éléments de E sont appelés des *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaires*.

Ce qu'il faut vraiment retenir : on peut ajouter des vecteurs entre eux, et multiplier les vecteurs par des constantes ; et les règles de calcul ci-dessus ont les conséquences attendues, par exemple $0 \cdot x = 0_E$ et $(-1)x = -x$

pour tout $x \in X$. Vérifions ces deux propriétés : pour tout x on a $0x = (0+0)x = 0x + 0x$, en en soustrayant $0x$ des deux côtés on obtient $0x = 0_E$. On a aussi $x + (-1)x = (1 + -1)x = 0x = 0_E$, ce qui montre que $(-1)x = -x$.

La définition d'un espace vectoriel peut paraître très lourde au premier abord ; mais elle regroupe des propriétés partagées par beaucoup de structures mathématiques importantes, que vous avez déjà rencontrées. Par exemple, sont des espaces vectoriels :

- L'espace $\mathbb{K}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec ses opérations usuelles. C'est l'exemple fondamental d'espace vectoriel, sur lequel les propriétés des espaces vectoriels sont modelées.
- L'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}[X]$, ainsi que l'espace des polynômes de degré $\leq n$ $\mathbb{K}_n[X]$.
- L'espace des fonctions d'un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec l'addition et la multiplication usuelles des fonction : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, $M_{n,m}(\mathbb{K})$, muni des opérations vues au chapitre précédent.

Définition 2.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n, y$ des vecteurs de E.

1. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x_1$ on dit que y est *colinéaire* à x_1.
2. S'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$ tels que
$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$
on dit que y est une *combinaison linéaire* de $x_1, \ldots, x_n$.

Notons qu'avec ces définitions, 0_E est colinéaire à tout vecteur de E ; et si x, y sont non nuls et y est colinéaire à x, alors $y = \lambda x$ se récrit sous la forme $x = \frac{1}{\lambda} y$, et x est colinéaire à y. Souvent, on dira que x et y sont colinéaires.

Définition 2.4. Sot $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est *libre* si pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on a l'implication
$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \forall i \lambda_i = 0_E \ .$$

Quand une famille de vecteurs n'est pas libre on dit qu'elle est *liée*.

Proposition 2.5. *La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ x_i ne peut pas être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(x_k)_{k \neq i}$.*

Démonstration. Si jamais la famille n'est pas libre, c'est qu'on a des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls mais tels que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E$; par hypothèse on peut trouver i tel que λ_i est non nul et on a
$$\lambda_i x_i = - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k x_k \quad \text{donc} \quad x_i = - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k \ .$$
Réciproquement, si pour un certain i on peut écrire $x_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k x_k$ alors en posant $\lambda_i = -1$ on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$ et les λ_k ne sont pas tous nuls. □

2.3 Sous-espaces vectoriels

En fait, souvent, les structures qu'on considère sont contenues dans un espace dont on sait déjà que c'est un espace vectoriel ($\mathbb{R}^n$, un espace de fonctions, de polynômes, de suites...) et on voudrait utiliser les lois de l'espace vectoriel ambiant pour en faire un espace vectoriel. Ceci nous amène à la notion suivante, qui est primordiale.

Définition 2.6. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* si :

1. F est non vide.
2. Pour tout $u, v \in F$, $u + v \in F$.
3. Pour tout $u \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in F$.

Il est important de vérifier que F est non vide ! souvent, on le fait en vérifiant que $0_E \in F$; de toute façon si F est non vide il doit contenir 0_E, puisque si l'on prend un u quelconque dans F (ce qui est possible dès que F est non vide) et qu'on le multiplie par 0 on obtient 0_E, qui doit donc être dans F puisque F est stable par multiplication par un scalaire. Par ailleurs, la deuxième et la troisième condition pourraient être regroupées en une seule condition :

$$\forall u, v \in F \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u + v \in F \ .$$

C'est-à-dire : une combinaison linéaire d'éléments de F est encore un élément de F.

Maintenant qu'on s'est un peu habitué aux espaces vectoriels, on écrira simplement 0 au lieu de 0_E pour désigner le vecteur nul.

Exemple.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{x, y \colon ax + by = 0\}$ est un sous-espace vectoriel pour tout $a, b \in \mathbb{R}$; si jamais $a = b = 0$ c'est $\mathbb{R}^2$ tout entier, sinon c'est la droite passant par 0 et de vecteur directeur $(-b, a)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $\{(x, y, z) \colon ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^3$; s'ils sont tous les trois nuls c'est $\mathbb{R}^3$ tout entier, sinon c'est le plan contenant 0 et orthogonal au vecteur (a, b, c).
3. Plus généralement, vérifions que pour tout corps $\mathbb{K}$, et toute matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^m \colon AX = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. Puisque $A.0 = 0$, $0 \in E$; et si $X, Y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on a
$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 0 + 0 = 0 \ .$$
Notons que l'ensemble E décrit ci-dessus pourrait de manière équivalente être vu comme l'ensemble de toutes les solutions $(x_1, \ldots, x_m)$ d'un système linéaire homogène à n lignes et m inconnues ; et en fait on verra dans le chapitre sur les applications linéaires que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ est de cette forme.
4. Dans l'espace vectoriel formé par toutes les suites de nombres réels, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace des suites convergentes est un sous-espace vectoriel : la suite nulle est convergente, et une combinaison linéaire de suites convergentes est encore une suite convergente. L'espace formé par les suites qui convergent vers 0 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Et celui formé par les suites qui tendent vers 1 ?
5. Toujours dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites satisfaisant une relation de *récurrence linéaire d'ordre deux* (par exemple) est un sous-espace vectoriel. Plus explicitement : fixons $a, b \in \mathbb{R}$ et considérons l'espace formé E par toutes les suites (u_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \ .$$
Alors la suite nulle appartient bien à E ; et si u, v sont deux éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifions que $w = \lambda u + v \in E$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) \\ &= (\lambda au_{n+1} + bv_{n+1}) + (\lambda au_n + bv_n) \\ &= w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$
Ceci montre bien qu'une combinaison linéaire d'éléments de E reste un élément de E, donc que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La même preuve montre que les suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ pour tout corps $\mathbb{K}$.

Proposition 2.7. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $F = \bigcap_i F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Puisque $0 \in F_i$ pour tout $i \in I$, on voit que $0 \in \bigcap_i F_i = F$. Si maintenant $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $i \in I$ on a $u, v \in F_i$ donc $\lambda u + v \in F_i$ puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E ; donc $\lambda u + v \in \bigcap F_i = F$, ce qui montre que F est bien un sous-espace vectoriel. $\square$

Définition 2.8. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Le *sous-espace vectoriel engendré par* $x_1, \ldots, x_n$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent $x_1, \ldots, x_n$. On le note $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Quand $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = E$ on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une *famille génératrice* de E.

Autrement dit : le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_n$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Par exemple, si $x \neq 0$, le sous-espace vectoriel engendré par x est la droite passant par 0 et de vecteur directeur x.

La description ci-dessus de l'espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_n$ est souvent trop abstraite pour être utilisable en pratique. On utilisera la caractérisation suivante (qu'on pourrait prendre comme définition alternative).

Proposition 2.9. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. Alors on a*

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{u \in E \colon u \textit{ est combinaison linéaire de } x_1, \dots, x_n\}\ .$$

Démonstration. Si F est un sous-espace vectoriel contenant $x_1, \dots, x_n$ alors F doit contenir toutes leurs combinaisons linéaires, ce qui montre l'inclusion de droite à gauche dans l'égalité ci-dessus. Pour montrer l'inclusion de gauche à droite, il nous suffit de vérifier que

$$F = \{u \in E \colon u \text{ est combinaison linéaire de } x_1, \dots, x_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E (il contient bien sûr $x_1, \dots, x_n$). Pour cela, notons tout d'abord que $0 = 0x_1 + \ldots + 0x_n \in F$.

Ensuite, si $u = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda u = \lambda\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda\lambda_n x_n \in F$.

Enfin, si $u\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in F$ et $v = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n \in F$ alors $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)x_n \in F$.

On a vérifié tous les points de la définition d'un sous-espace vectoriel, ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 2.10. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille* libre *d'éléments de E. Alors $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_n, y)$ est liée.*

En fait, on se sert souvent de cette proposition sous la forme suivante : si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ est libre.

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre, et $y \in E$. Si $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors on a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = y$, donc la combinaison linéaire $y - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_n x_n = 0$ alors que ses coefficients ne sont pas tous nuls (le coefficient de y vaut 1), ce qui montre que $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

Réciproquement, supposons que $x_1, \dots, x_n, y$ soit liée ; alors on a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et μ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \mu y = 0$. Si μ n'est pas nul alors on peut écrire $y = -\frac{\lambda_1}{\mu} x_1 - \ldots \frac{\lambda_n}{\mu} x_n$, par conséquent $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Si $\mu = 0$ alors on a $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Par conséquent μ ne peut pas être nul et $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. $\square$

2.4 Bases et dimension

Définition 2.11. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une *base* de E si cette famille est à la fois libre et génératrice.

Proposition 2.12. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, tout $u \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. On dit alors que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les* coordonnées *de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.*

Démonstration. Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et $u \in E$. On sait déjà que u s'écrit sous la forme $u = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n$ puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice ; si on a aussi $u = \lambda'_1 e_1 + \ldots \lambda'_n e_n$ alors on obtient $u - u = 0 = (\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n$, donc comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre on déduit $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$.

Pour montrer la réciproque, notons que si tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$ alors la famille est en particulier génératrice, et on doit simplement vérifier qu'elle est libre. Pour ce faire, supposons que λ_1, λ_n vérifient $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n = 0 = 0e_1 + \ldots + 0e_n$; par hypothèse on doit avoir $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$, ce qui montre comme attendu que notre famille est libre. $\square$

Dans $\mathbb{K}^n$, on a une base naturelle (souvent appelée *base canonique*) formée par les vecteurs $e_1, \dots, e_n$, où toutes les coordonnées de e_i sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1. En effet, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, et d'autre part si $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = x$, alors en regardant la i-ième coordonnée on obtient $\lambda_i = x_i$ pour tout i, ce qui nous montre que la base canonique est bien une base de $\mathbb{K}^n$ (ouf !).

Lemme 2.13 (Lemme de Steinitz)**.** *Soit $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs linéairement indépendants d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E engendré par des vecteurs $w_1, \dots, w_n$. Alors $m \leq n$ et soit $(v_1, \dots, v_m)$ est une base de E soit on peut trouver $i_1, \dots, i_k$ tels que la famille $(v_1, \dots, v_m, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ soit une base de E.*

Démonstration. Fixons un entier $m \geq 1$; on va raisonner par récurrence descendante sur le cardinal de l'intersection $\{v_1, \dots, v_m\} \cap \{w_1, \dots, w_n\}$ pour montrer le résultat. Si ce cardinal est égal à m, alors on a $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \{w_1, \dots, w_n\}$; dans ce cas-là on a bien $m \leq n$ et quitte à renuméroter on peut supposer $v_i = w_i$ pour tout $i \leq n$. Ensuite, on peut choisir une famille libre $(v_1, \dots, v_n, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ ayant le plus grand nombre possible d'élements (il est possible que $k = 0$!). Reste à montrer que cette famillle est génératrice ; si ce n'est pas le cas, il existe j tel que $w_j \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ et on peut le rajouter à la famille $(v_1, \dots, v_n, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$, contredisant le fait qu'elle avait le plus grand nombre d'éléments possible. Ceci prouve le résultat désiré quand $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \{w_1, \dots, w_n\}$.

Supposons maintenant le résultat démontré quand le cardinal de l'intersection appartient à $\{k, \dots, m\}$ avec $k \in \{1, \dots, m\}$, et qu'on a une famille libre $(v_1, \dots, v_m)$ et une famille génératrice $(w_1, \dots, w_n)$ dont l'intersection est de cardinal $k - 1$. On peut trouver i tel que $v_i \notin \{w_1, \dots, w_m\}$; quitte à renuméroter on suppose $i = 1$ et alors on peut écrire

$$v_1 = \lambda_1 w_1 + \dots \lambda_n w_n \ .$$

Tous les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne peuvent pas être nuls ; quitte à renuméroter $(w_1, \dots, w_n)$ on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$. Alors on a

$$w_1 = \frac{1}{\lambda_1}(v_1 - \lambda_2 w_2 - \dots - \lambda_n w_n) \ .$$

Par conséquent, la famille $(v_1, w_2, \dots, w_n)$ est génératrice ; par construction on a

$$|\{(v_1, \dots, v_m)\} \cap \{(v_1, w_2, \dots, w_n)\}| = k \ ,$$

donc notre hypothèse de récurrence s'applique, à la fois pour nous permettre de conclure que $m \leq n$ et qu'on peut choisir des vecteurs parmi $(w_2, \dots, w_n)$ pour compléter $(v_1, \dots, v_m)$ en une base de E. □

Théorème 2.14. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_m)$ sont deux bases de E alors $n = m$.*

Démonstration. Du lemme précédent et du fait que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et $(f_1, \dots, f_m)$ est génératrice on déduit que $n \leq m$; et comme $(f_1, \dots, f_m)$ est libre et $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice on a aussi $m \leq n$, donc $m = n$. □

Définition 2.15. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E admet une partie génératrice finie, on dit que E est de *dimension finie*. Si $E = \{0\}$ on dit que E est de dimension 0 ; sinon on appelle *dimension* de E le cardinal d'une base de E. On note cet entier $\dim(E)$.

Par exemple, $\dim(\mathbb{R}) = 1$, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et plus généralement $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ pour tout corps $\mathbb{K}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: en effet, on a vu que la base canonique est une base de $\mathbb{K}^n$ avec n éléments.

Un autre exemple important : pour tout entier n l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ admet pour base la famille $(1, X, \dots, X^n)$, et est donc de dimension $n + 1$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du lemme de Steinitz (en fait, c'est ce qu'on a commencé par montrer dans la démonstration du lemme de Steinitz).

Théorème 2.16. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, L une partie libre finie de E et G une partie génératrice finie de E telles que $L \subseteq G$. Alors il existe une base B de E telle que $L \subseteq B \subseteq G$.*

Ce théorème reste vrai si l'on ne suppose pas L, G finies, modulo l'utilisation de l'*axiome du choix* ; dans ce cours on va éviter d'entrer dans ce type de considérations.

Corollaire 2.17 (Théorème de la base incomplète)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_m)$ on peut trouver $x_{m+1}, \dots, x_n$ tels que $(x_1, \dots, x_n)$ soit une base de E (en particulier, $m \leq n$).
2. Pour toute famille génératrice $(x_1, \dots, x_m)$ on peut trouver $i_1 < \dots < i_n$ tels que $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ soit une base de E (en particulier $m \geq n$).

Démonstration. Le premier point est à nouveau une conséquence immédiate du lemme de Steinitz.

Le deuxième point se montre de manière similaire : puisque E est non réduit à $\{0\}$ il doit exister un plus petit indice i_1 tel que x_{i_1} soit non nul, et la famille (x_{i_1}) est libre ; puisque $(x_{i_1}, \ldots, x_m)$ est génératrice, on peut trouver une base B telle que $x_{i_1} \in B \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_m\}$. □

Le théorème de la base incomplète nous dit en particulier que toute partie génératrice contient une base ; comment la trouver en pratique ? Etant donnés des vecteurs $w_1, \ldots, w_n$, comment déterminer une base de l'espace vectoriel qu'ils engendrent ? La méthode utilisée dans la preuve du théorème de la base incomplète se résume ainsi : on prend le premier vecteur qui n'est pas nul, et il fera partie de notre base ; puis on prend le premier qui ne lui est pas colinéaire, et on l'ajoute, et ainsi de suite : à chaque étape, on cherche le premier vecteur qui n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par les vecteurs qu'on a déjà mis de côté, et on l'ajoute à notre famille. Quand ce procédé s'arrête, on a trouvé notre base.

Une autre méthode est basée sur l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par former une matrice dont les *colonnes* sont les vecteurs $w_1, \ldots, w_n$. Quand on applique une opération élémentaire sur les colonnes de la matrice, l'espace engendré par les colonnes ne change pas ! On peut donc se ramener à une matrice échelonnée réduite (en colonnes) dont les colonnes engendrent le même espace que l'espace de départ, et les colonnes non nulles dans cette matrice nous donnent la base qu'on était en train de chercher. La raison pour laquelle on travaille avec des colonnes plutôt que des lignes a à voir avec les conventions qu'on utilisera dans le chapitre sur les applications linéaires...

Appliquons cette méthode sur un exemple : dans $\mathbb{R}^4$, cherchons une base de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$, $(-1,1,1,-1)$ et $(0,2,2,1)$. On commence par former la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on se ramène à une matrice échelonnée en colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (C_3 \to C_3 + C_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (C_3 \to C_3 - C_2 \text{ et } C_4 \to C_4 - 2C_2)\ .$$

Enfin, $C_4 \to C_4 - C_3$ nous amène à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est échelonnée en colonnes.

Dans une matrice échelonnée en colonnes, les colonnes non nulles forment une famille libre ; comme elles engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs de départ, une base du sous-espace vectoriel engendré par $(1,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$, $(-1,1,1,-1)$ et $(0,2,2,1)$ est donc $(1,0,1,1), (0,1,0,1), (0,0,2,-1)$. En particulier, ce sous-espace vectoriel est de dimension 3.

Deux remarques : tout d'abord, il est inutile de chercher à se ramener à une forme échelonnée réduite ! Le fait que la matrice soit échelonnée nous suffit. Ensuite, différentes combinaisons sur les colonnes pourraient nous donner des bases différentes : c'est normal, un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ admet une infinité de bases différentes...

Il suit des théorèmes précédents que, si E est de dimension finie, alors la dimension de E est égale au plus grand cardinal d'une famille libre d'élements de E, et au plus petit cardinal d'une famille génératrice d'eléments de E. Le résultat de l'exercice suivant est aussi souvent utile.

Exercice 2.18. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit B une partie de E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. B est une base de E.
2. B est libre et $\text{card}(B) = n$.
3. B est génératrice et $\text{card}(B) = n$.

Proposition 2.19. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie,* $\dim(F) \leq \dim(E)$ *et $F = E$ si, et seulement si,* $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration. Si $F = \{0\}$ il n'y a rien à démontrer. Par conséquent on suppose que $\dim(F) \geq 1$ (et donc aussi $\dim(E) \geq 1$).

Soit $n = \dim(E)$. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de F, la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée dans E, donc aussi dans F ; appelons m le plus grand entier tel qu'il existe $(x_1, \dots, x_m)$ qui forment une famille libre dans F (on vient de justifer que m existe et $m \leq n$). Alors, pour tout $y \in F$, la famille $(x_1, \dots, x_m, y)$ est liée ; comme $(x_1, \dots, x_m)$ est libre on doit avoir $y \in Vect(x_1, \dots, x_m)$. Par conséquent $(x_1, \dots, x_m)$ est une base de F, et on a donc montré à la fois que F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Bien sûr, si $F = E$ alors $\dim(F) = \dim(E)$. Pour voir la réciproque, supposons que $F \subsetneq E$; on peut trouver une base $(x_1, \dots, x_m)$ de F et $y \in E \setminus F$; en particulier y n'est pas dans $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m)$, donc $(x_1, \dots, x_m, y)$ est libre, ce qui montre que $\dim(E) \geq m + 1 > m = \dim(F)$. ☐

Revenons à un exemple vu plus haut : les suites de nombres complexes satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Proposition 2.20. *Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé par les suites satisfaisant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \ .$$

Alors E est un espace vectoriel de dimension 2 ; et on peut en décrire une base explicitement :

1. *Si le polynôme $P(X) = X^2 - aX - b$ a deux racines complexes distinctes α, β alors les suites (α^n) et (β^n) forment une base de E.*
2. *Si P a une racine double α dans $\mathbb{C}$, alors les suites (α^n) et $(n\alpha^n)$ forment une base de E.*

Démonstration. Commençons par noter que si u, v sont deux éléments de E tels que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors on montre par récurrence (forte) que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: en effet, cette égalité est vraie pour $n = 0, 1$. Supposons que $n \geq 1$ et que l'égalité soit vraie pour tout $k \leq n$; alors on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a u_n + b u_{n-1} \\ &= a v_n + b v_{n-1} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= v_{n+1} \ . \end{aligned}$$

Ensuite, notons que si α est une racine de P alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\alpha^{n+2} - a\alpha^{n+1} - b\alpha^n = \alpha^n(\alpha^2 - a\alpha - b) = \alpha^n P(\alpha) = 0 \ .$$

Donc la suite (α^n) est bien un élément de E. Supposons qu'on est dans le cas où P a deux racines distinctes α, β, et montrons que la famille (u_n, v_n) définie par $u_n = \alpha^n$ et $v_n = \beta^n$ est une base de E.

Tout d'abord, on doit montrer qu'elle est libre, autrement dit que u, v ne sont pas colinéaires : par l'absurde, si $\lambda u = v$ alors en évaluant en $n = 0, 1$ on a à la fois $\lambda u_0 = v_0$ et $\lambda u_1 = v_1$, c'est à dire $\lambda = 1$ et $\lambda\alpha = \beta$, impossible puisque $\alpha \neq \beta$.

Reste à vérifier que (u, v) est génératrice ; soit $w \in E$. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$. Encore en évaluant en $0, 1$, λ et μ doivent être solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta &= u_1 \end{cases}$$

ce système se résoud facilement : on obtient

$$\lambda = \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta} \ \text{et} \quad \mu = \frac{\alpha u_0 - u_1}{\alpha - \beta} \ .$$

Alors, $\lambda u + \mu v$ est un élément de E qui prend les mêmes valeurs que w pour $n = 0, 1$: par la remarque faite au début de la preuve, on a $\lambda u + \mu v = w$. Ceci montre bien que (u, v) est génératrice.

Le cas où α est racine double se traite de façon similaire et est laissé en exercice (c'est le cas qui devrait être fait au tableau en cours). ☐

Exercice 2.21. Décrire les suites de nombres réels satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On pourra distinguer les cas où le polynôme P introduit ci-dessus a deux racines réelles, une racine double (forcément réelle) ou deux racines complexes conjuguées.

2.5 Sommes de sous-espaces, sommes directes, supplémentaires

Définition 2.22. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on note

$$F + G = \{f + g \colon f \in F \text{ et } g \in G\} \ .$$

Proposition 2.23. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Notons que tout sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G doit contenir $F + G$: de manière équivalente, on aurait pu définir $F + G$ comme l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent à la fois F et G.

Démonstration. Puisque $0 \in F$ et $0 \in G$, on a $0 = 0 + 0 \in F + G$. Si maintenant $u = f_1 + g_1 \in F + G$, $v = f_2 + g_2 \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda u + v = (\lambda f_1 + f_2) + (\lambda g_1 + g_2) \in F + G \ .$$

Donc $F + G$ contient 0 et est stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 2.24. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F, G sont *en somme directe* si $F \cap G = \{0\}$. Dans ce cas on note $F + G = F \oplus G$.

Définition 2.25. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires* si $F \oplus G = E$.

Proposition 2.26. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F \cap G = \{0\}$ alors $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$.*

Démonstration. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $(g_1, \ldots, g_m)$ une base de G. La famille $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$ est une famille génératrice de $F + G$: ce sont des éléments de $F + G$, et tout élément de $F + G$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs. On va montrer que cette famille est libre.

Pour ce faire, supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ sont tels que

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_m g_m = 0 \ .$$

On peut récrire cela sous la forme

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = -\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_m g_m \ .$$

Le vecteur à gauche de cette égalité appartient à F, celui de droite appartient à G ; par conséquent le fait que $F \cap G = \{0\}$ entraîne que ce vecteur est nul, autrement dit

$$\lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_n f_n = 0 = \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_m g_m \ .$$

Comme $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_m$ sont libres, on obtient que tous les λ_i et tous les μ_j sont nuls, ce qu'on voulait démontrer. □

Proposition 2.27. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire.*

Démonstration. Si $F = E$ alors F et $\{0\}$ sont supplémentaires ; de même si $F = \{0\}$ alors F et E sont supplémentaires. Sinon, considérons une base $f_1, \ldots, f_n$ de F. Cette famille est libre dans F, donc peut être complétée en une base $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m)$ de E. En notant $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_m)$ on a $F + G = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m) = E$; et on vérifie par un raisonnement analogue à celui employé ci-dessus que $F \cap G = \{0\}$. □

Théorème 2.28 (Formule de Grassman)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on a*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \ .$$

Démonstration. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de G, donc on peut trouver un sous-espace vectoriel $G_1 \subseteq G$ tel que $(F \cap G) \oplus G_1 = G$. On a alors :

- $\dim(F \cap G) + \dim(G_1) = \dim(G)$;
- $F \oplus G_1 = F + G$.

Le premiers point ci-dessus devrait être clair (sinon, relisez la formule de Grassman), et il nous reste à justifier le deuxième. Soit $x \in F + G$. Alors on peut écrire $x = f + g$ avec $f \in F$, $g \in G$; et on a aussi $g = a + g_1$ avec $a \in F \cap G$ et $g_1 \in G_1$. D'où $x = (a + f) + g_1 \in F + G_1$. D'autre part, $F \cap G_1 \subseteq (F \cap G) \cap G_1 = \{0\}$; finalement on a bien $F \oplus G_1 = F + G$. En écrivant les dimensions, on obtient :

$$\dim(F) + \dim(G_1) = \dim(F + G) \ , \text{ autrement dit}$$

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \ .$$

□

Proposition 2.29. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si, et seulement si,* $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. F et G sont en somme directe si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$, ce qui est équivalent à dire que $\dim(F \cap G) = 0$, et la formule de Grassman nous dit que ceci est équivalent à $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$. □

Proposition 2.30. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *F et G sont supplémentaires.*
2. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ *et* $F \cap G = \{0\}$.