Chapitre 4

Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Résultats théoriques

Définition 4.1. Une *fraction rationnelle* est une fraction de la forme $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$.

Si $\dfrac{P_1}{Q_1}$, $\dfrac{P_2}{Q_2}$ sont deux fractions rationnelles telles que $P_1Q_2 = P_2Q_1$, on va considérer qu'elles sont égales, exactement comme quand on travaille avec les rationnels. Bien sûr on peut additionner et multiplier des fractions rationnelles :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \qquad \text{et} \quad \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2} \ .$$

On peut également les dériver, avec la formule

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - Q'P}{P^2} \ .$$

On note $\mathbb{K}(X)$ l'espace vectoriel formé par les fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$. Comme dans $\mathbb{Q}$ les fractions rationnelles peuvent (doivent ?) se mettre sous forme irréductible.

Définition 4.2. On dit que $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est sous *forme irréductible* si P et Q sont premiers entre eux, et Q est unitaire.

Autrement dit, comme on travaille sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $F = \dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si et seulement si Q est unitaire et P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.

Une fraction rationnelle a une forme irréductible unique et on va principalement travailler avec ces formes irréductibles ; en pratique, il faut simplement s'habituer à simplifier le quotient $\dfrac{P}{Q}$ par d'éventuels diviseurs communs non constants de P et Q. Une fraction rationnelle a une forme irréductible unique.

Définition 4.3. Si $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, on note $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$.

Par divison euclidienne, on peut écrire $F = P_1 + \dfrac{P_2}{Q}$, où $\deg(P_1) < \deg(Q)$, et $\dfrac{P_2}{Q}$ est irréductible. Notons qu'une telle décomposition est unique. On l'appelle P_1 la *partie entière* de F.

Notons que le degré d'une fraction rationnelle est bien défini : si $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$, alors on a $P_1Q_2 = P_2Q_1$, donc $\deg(P_1) + \deg(Q_2) = \deg(P_2) + \deg(Q_1)$ et, comme $\deg(Q_1), \deg(Q_2)$ sont des entiers puisque Q_1 et Q_2 sont non nuls, on en déduit $\deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(P_2) - \deg(Q_2)$.

Définition 4.4. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible dans $\mathbb{K}(X)$. Un *zéro* de F est un élément α de $\mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$; et un *pôle* de F est un élément α de $\mathbb{K}$ tel que $Q(\alpha) = 0$.

Notons que F a un ensemble fini (éventuellement vide !) A de pôles ; et que F définit une fonction de $\mathbb{K} \setminus A$ dans $\mathbb{K}$. Deux fractions rationnelles qui définissent la même fonction doivent être égales : en effet, si $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $G = \dfrac{P_2}{Q_2}$ définissent la même fonction, alors pout tout $x \in \mathbb{K}$ qui n'est ni un pôle de F ni un pôle de G on a

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{donc} \quad P_1(x)Q_2(x) - P_2(x)Q_1(x) = 0 \ .$$

En particulier, $P_1Q_2 - P_2Q_1$ doit avoir une infinité de racines [i], donc $P_1Q_2 - P_2Q_1 = 0$, autrement dit $F = G$.

Définition 4.5. Un *élément simple* est une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{P}{Q^k}$, où Q est un polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$, $k \geq 1$ et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Comme on l'a dit précédemment, dans ce cours on ne s'intéresse qu'à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Vous avez vu au premier semestre que les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1 ; et sur $\mathbb{R}$ les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Par conséquent, les éléments simples ont la forme suivante :

1. Sur $\mathbb{C}$, un élément simple est de la forme $\dfrac{a}{(X-\alpha)^k}$, où $a, \alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Sur $\mathbb{R}$, un élément simple est de la forme $\dfrac{a}{(X-\alpha)^k}$, où $a, \alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, ou bien de la forme $\dfrac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^k}$, où $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2 - 4\beta < 0$ (de manière équivalente : le polynôme $X^2 + \alpha X + \beta$ n'a pas de racine réelle).

Notre but est de *décomposer une fraction rationnelle en éléments simples* ; on va expliquer pourquoi c'est possible de le faire dans $\mathbb{C}(X)$(en fait on peut le faire sur tout corps, et nos arguments ci-dessous s'adaptent au contexte général, mais ici on essaie d'éviter des énoncés trop généraux).

Proposition 4.6. *Soit $n \geq 1$, $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme unitaire, et*

$$Q(X) = (X-\alpha_1)^{n_1} \dots (X-\alpha_k)^{n_k}$$

la décomposition de Q en produit de facteurs irréductible unitaires. Alors l'espace $E_Q = \{P/Q \colon P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(X)$ de dimension n, et les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{1}{(X-\alpha_i)^j}$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$ en forment une base.

Démonstration. Il est immédiat que $0 = \dfrac{0}{Q} \in E_Q$, et qu'une combinaison linéaire d'éléments de E_Q est un élément de E_Q, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Il est tout aussi clair que la famille $\left(\dfrac{1}{Q}, \dots, \dfrac{X^{n-1}}{Q}\right)$ en forme une base et donc E_Q est de dimension n.

La famille de E_Q formée par tous les $\dfrac{1}{(X-\alpha_i)^j}$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$ a $n_1 + \dots + n_k = n$ éléments ; pour montrer que c'est une base il nous suffit donc de vérifier qu'elle est libre. Soit donc des coefficients $\lambda_{i,j}$ tels que

$$F(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \frac{1}{(X-\alpha_i)^j} = 0 \ .$$

L'idée est qu'on peut retrouver les valeurs des $\lambda_{i,j}$ en estimant les valeurs des dérivées de

$$G_p(X) = (X-\alpha_p)^{n_p} F(X)$$

i. Ici il est important de se rappeler que les corps qu'on considère dans ce cours sont infinis : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$...

en α_p ; en effet, on a pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$:

$$G_p(X) = (X - \alpha_p)^{n_p} F(X) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_{p,j} (X - \alpha_p)^{n_p - j} + (X - \alpha_p)^{n_p} \sum_{i=1, i \neq p}^{k} \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{i,j} \frac{1}{(X - \alpha_i)^j} \ .$$

On voit alors que $G_p^{(q)}(\alpha_p) = q! \lambda_{p, n_p - q}$ pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$ et tout $q \in \{0, \dots, n_p - 1\}$, et donc de $F(X) = 0$ on tire $\lambda_{i,j} = 0$ pour tout i, j, montrant que la famille est libre. □

Théorème 4.7 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$). *Tout élément de* $\mathbb{C}(X)$ *admet une unique* décomposition en élements simples. *Plus précisément : si* $F = \dfrac{P}{Q}$ *est une fraction rationnelle irréductible dans* $\mathbb{C}(X)$ *et* $Q(X) = (X - \alpha_1)^{n_1} \dots (X - \alpha_k)^{n_k}$*, alors on peut écrire*

$$F(X) = P_1(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \ .$$

où P_1 *est un polynôme et les* $a_{i,j}$ *sont des nombres complexes. De plus cette décomposition est unique.*

Démonstration. On a déjà mentionné l'unicité de la partie entière d'un polynôme ; P_1 dans l'identité ci-dessus doit être la partie entière de F. Alors $F - P_1$ s'écrit sous la forme $\frac{P}{Q}$, où $\deg(P) < \deg(Q)$; autrement dit $F - P_1$ appartient à l'espace E_Q défini dans la proposition 4.6, et le résultat de cette proposition nous dit que $F - P_1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$F - P_1 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \ .$$

□

Notons que pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples, la méthode de la preuve de 4.6 nous dit qu'on peut toujours procéder en multipliant $F(X)$ par $(X - \alpha_i)^{n_i} F(X)$ et en évaluant en α_i les dérivées successives de $(X - \alpha_i)^{n_i} F(X)$. En pratique, cette méthode est souvent assez lourde en calculs et on essaiera si possible de faire plus simple.

On verra dans la prochaine section des exemples de calcul de décomposition en éléments simples ; pour l'instant, voyons à quoi ressemble cette décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

Théorème 4.8 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$). *Tout élément de* $\mathbb{R}(X)$ *admet une unique décomposition en élements simples. Plus précisément : si* $F = \dfrac{P}{Q}$ *est une fraction rationnelle irréductible dans* $\mathbb{R}(X)$ *et* $Q(X) = (Q_1(X))^{n_1} \dots (Q_n(X))^{n_k}$ *est la factorisation de* Q *en produits de polynômes irréductibles unitaires, alors on peut écrire*

$$F(X) = P_1(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{P_{i,j}(X)}{(Q_i(X))^j} \ .$$

où P_1 *est un polynôme et* $\deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i)$*. De plus cette décomposition est unique.*

Notons que chaque Q_i est de degré 1 ou 2, et donc chaque $P_{i,j}$ sera soit un polynôme constant soit de degré 1. On ne va pas donner ici la preuve de ce théorème ; l'argument d'algèbre linéaire qu'on a donné dans $\mathbb{C}(X)$ s'adapterait sans difficulté notable (ou on pourrait commencer par décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, et en déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, comme on le verra sur un exemple dans la prochaine section).

L'unicité de la décomposition en élément simples nous permet aussi d'utiliser des symétries de la fonction pour calculer plus vite des coefficients.

4.2 Calculs pratiques

Insistons sur le fait qu'on peut utiliser des nombres complexes pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{R}$! En particulier, si deux fractions rationnelles F_1, F_2 sont égales dans $\mathbb{R}(X)$ alors elles sont égales dans $\mathbb{C}(X)$: on peut évaluer une fraction rationnelle en un nombre complexe pour la décomposer sur $\mathbb{R}$. Et si jamais on a décomposé $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, alors on peut trouver la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ en regroupant deux à deux les éléments simples correspondant à une racine complexe non réelle de Q et à son conjugué.

Voyons un exemple simple : considérons la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$. Sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ sera de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} \ .$$

Pour calculer a, on regarde $XF(X)$, qui vaut à la fois $\dfrac{1}{X^2+1}$ et $a + X\dfrac{bX+c}{X^2+1}$. En évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{0^2+1} = a \text{ donc } a = 1 \ .$$

Et pour calculer b, c on regarde $(X^2+1)F(X)$, qu'on évalue en i, pour obtenir

$$\frac{1}{i} = bi + c \text{ donc } -i = bi + c \ .$$

Comme b, c sont réels, on en déduit $b = -1$ et $c = 0$. Finalement, on est arrivé à

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$$

On aurait pu procéder autrement pour calculer b, c : comme $F(X) = -F(-X)$, et que

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} \\ -F(-X) &= \frac{a}{X} + \frac{bX-c}{X^2+1} \end{aligned}$$

on déduit de l'unicité de la décomposition en éléments simples que $c = -c$, donc $c = 0$. Pour calculer a, la méthode la plus simple reste de multiplier par X et d'évaluer en 0 pour obtenir $a = 1$. Pour calculer b, outre l'évaluation en i, on pourrait évaluer en 1 et obtenir :

$$F(1) = \frac{1}{2} = a + \frac{b}{2} \text{ donc } b = -1 \ .$$

On aurait aussi pu calculer b en regardant la limite de $xF(x)$ quand $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \ ;$$

d'autre part, puisque $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX}{X^2+1}$ on voit que la limite de $xF(x)$ en $+\infty$ est égale à $a+b$, d'où le fait que $a + b = 0$ et donc $b = -1$.

Encore une autre façon : remarquer que

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{(X^2+1) - X^2}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$$

pour obtenir directement la décomposition en éléments simples.

Finalement, on aurait pu passer par le calcul de la décomposition en élement simples dans $\mathbb{C}(X)$, qui doit être de la forme

$$F(X) = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-i} + \frac{\gamma}{X+i} \ .$$

En évaluant $XF(X)$ en 0, on trouve $\alpha = 1$. Puis en évaluant $(X-i)F(X) = \frac{1}{X(X+i)}$ en i, on obtient $\beta = \frac{1}{2i^2} = -\frac{1}{2}$. Pour calculer γ, on peut évaluer $(X+i)F(X)$ en $-i$; ou bien utiliser le fait que $F(X) = \overline{F}(X)$ pour déduire que $\beta = \bar{\gamma}$, donc $\gamma = -\frac{1}{2}$. Ceci nous donne la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{(X-i)} \ .$$

Et on peut se servir de cela pour retrouver la décomposition en élément simples sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{(X-i)} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{X+i+X-i}{(X+i)(X-i)} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{2X}{X^2+1} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} \ . \end{aligned}$$

On voit que la décomposition en élements simples sur $\mathbb{C}$ contient plus d'informations que la décomposition en élements simples sur $\mathbb{R}$: passer par le calcul de toute la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ pour en déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ n'est pas en général la méthode la plus efficace...

Le bilan à tirer de cet exemple : une fois qu'on a correctement identifié la forme a priori de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, tous les coups sont permis pour identifier les coefficients : calcul de dérivées, utilisation de symétries de la fonction, utilisation de limites, évaluation en un point bien choisi... Réduire au même dénominateur, identifier les coefficients pour obtenir un système et résoudre le système correspondant n'est pas recommandé !

Un autre exemple : décomposons sur $\mathbb{R}(X)$la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} \ .$$

On voit dès le départ que la décomposition va être pénible, à cause des deux termes au carré dans le dénominateur. Le numérateur est de degré strictement inférieur au numérateur, qui est déjà factorisé, et on écrit donc :

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{(X^2+1)} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2} \ ,$$

où a, b, c, d, e, f sont 6 coefficients réels à déterminer.

Pour calculer b, on forme

$$G(X) = (X-1)^2F(X) = \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

et on évalue en 1 : $b = \dfrac{4}{4} = 1$. De même pour évaluer e et f, on multiplie par (X^2+1) et on évalue en i, ce qui donne

$$ei + f = \frac{4i}{(i-1)^2} = \frac{4i}{-2i} = -2$$

Comme e, f sont réels, on déduit que $e = 0$ et $f = -2$.

Les autres coefficients sont plus compliqués à calculer ; on essaie d'extraire des informations en faisant le moins de calculs possibles.

Par exemple, on peut évaluer en 1 pour obtenir

$$0 = -a + b + d + f \quad \text{ donc } d - a = 1 \ .$$

Ou regarder la limite de $xf(x)$ quand x tend vers $+\infty$ pour obtenir

$$0 = a + c \ .$$

On voit que, si on arrive à calculer a, on aura tous les autres coefficients : il nous manque juste une information pour conclure. Si on aime calculer des dérivées, on utilise le fait que $a = G'(1)$ et que

$$G'(X) = \frac{4(X^2+1)^2 - 4X.4X(X^2+1)}{(X^2+1)^3} \qquad \text{donc } G'(1) = -1 \ .$$

Ceci nous donne $a = -1$, donc $d = 0$ et $c = 1$.

On a fini notre calcul ; une autre méthode si on est sujet aux erreurs lors des calculs de dérivées : on évalue en un point ne donnant pas des calculs trop compliqués, par exemple ici -1, pour obtenir

$$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{-c+d}{2} + \frac{-e+f}{4} = \frac{-4}{4.4} = -\frac{1}{4} \ .$$

En remplaçant b, e, f par leurs valeurs, c par $-a$ et d par $1+a$ on obtient

$$a\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

donc

$$\frac{1}{2}a = -\frac{1}{4} \text{ d'où } a = -1 \ .$$

Un risque avec le fait qui consiste à utiliser des évaluations en des points où les calculs sont simples est qu'on peut obtenir des informations redondantes : par exemple, si au lieu d'évaluer en -1 on avait évalué en 0, on aurait obtenu $F(0) = 0 = -a + b + d + f = -a + 1 + 1 + a - 2$, ou encore $0 = 0$, ce qui n'est pas très utile !

Au final, on a obtenu (de haute lutte) l'identité

$$\frac{X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X}{X^2+1} - \frac{2}{(X^2+1)^2} \ .$$

Chapitre 5

Bref retour sur les nombres réels

Les notions de ce chapitre, et certaines des notions du chapitre suivant, ont été vues au premier semestre ; n'hésitez pas à reprendre vos notes de cours pour compléter ce cours-ci.

5.1 Majorants, minorants ; borne sup, borne inf

Définition 5.1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de A si

$$\forall x \in A \ x \leq M \ .$$

Et on dit que m est un *minorant* de A si

$$\forall x \in A \ m \leq x \ .$$

Définition 5.2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $M \in \mathbb{R}$.

1. On dit que M est la *borne supérieure* de A si :
   (a) M est un majorant de A.
   (b) Pour tout majorant M' de A, on a $M \leq M'$.
2. On dit que m est la *borne inférieure* de A si :
   (a) m est un minorant de A.
   (b) Pour tout minorant m' de A, on a $m' \leq m$.

Autrement dit : la borne supérieure est le plus petit des majorants ; la borne inférieure est le plus grand des minorants. Borne supérieure et borne inférieure sont intimement liées, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 5.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M. Montrer que $-A$ admet $-M$ comme borne inférieure.

La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, sur laquelle sont basées toutes les preuves des théorèmes d'analyse que vous verrez cette année, est la suivante :

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

(Et bien sûr, cela entraîne que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure).

On appelle cette propriété l'*axiome de la borne supérieure*. Au premier semestre, vous avez par exemple utilisé cette propriété pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: dans tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, il y a un nombre rationnel.

On va se servir de l'axiome de la borne supérieure pour retrouver quelques propriétés des suites vues au premier semestre. Pour cela, on aura besoin de la caractérisation suivante.

Proposition 5.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors M est la borne supérieure de A si, et seulement si, M est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leq a$.*

Démonstration. Supposons que M est la borne supérieure de A. Alors M est un majorant de A ; de plus, pour tout $\varepsilon > 0$ $M - \varepsilon < M$ donc $M - \varepsilon$ ne peut être un majorant de A, par conséquent il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$.

Réciproquement, si M est un majorant de A ayant la propriété ci-dessus, montrons que aucun $x < M$ ne peut pas être un majorant de A : si $x < M$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x < M - \varepsilon < M$, et on peut par hypothèse trouver $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leq a$, en particulier il existe $a \in A$ tel que $x < a$ et donc x n'est pas un majorant de A. Par conséquent M est le plus petit des majorants de A, autrement dit, la borne supérieure de A. □

A partir de maintenant, pour simplifier les notations, on va autoriser les sup et les inf à être infinis : autrement dit, si A est non vide et n'est pas majoré on écrira $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minoré on écrira $\inf(A) = -\infty$. Le seul cas où on évitera de parler de sup ou d'inf est quand $A = \emptyset$.

Proposition 5.5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est un intervalle si, et seulement si, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a l'implication*
$$(x \in A \text{ et } y \in A \text{ et } x < z < y) \Rightarrow z \in A\ .$$

Démonstration. Il n'y a rien à démontrer si $A = \emptyset$ (on convient que l'ensemble vide est bien un intervalle, par exemple l'intervalle ouvert $]0, 0[$). Clairement, les intervalles ont la propriété ci-dessus. Supposons que A est non vide et a cette propriété. Soit $a = \inf A$ et $b = \sup(A)$. Montrons que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $a < z < b$ on a $z \in A$; ceci nous montrera que $]a, b[\subseteq A$, et alors on sera forcément dans un des quatre cas suivants :

1. $a \notin A$ et $b \notin A$; alors $A =]a, b|$.
2. $a \in A$ et $b \notin A$; alors $A = [a, b[$.
3. $a \notin A$ et $b \in A$; alors $A =]a, b]$.
4. $a \in A$ et $b \in A$; alors $A = [a, b]$ (et on dit que A est un segment).

Soit donc z tel que $a < z < b$. Par définition d'une borne inférieure, z ne peut pas être un minorant de A : il doit donc exister $x \in A$ tel que $x < z$. De même, z ne peut pas être un majorant de A, ce qui nous donne $y \in A$ tel que $z < y$. On a alors $x < z < y$, et puisque $x, y \in A$ on en conclut que $z \in A$. □

Exercice 5.6. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$. Montrer que $I \cup J$ est un intervalle.

5.2 Suites convergentes. Suites extraites

Définition 5.7. Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que (u_n) *converge vers* $l \in \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |u_n - l| \leq \varepsilon\ .$$

Autrement dit : pour n suffisamment grand, u_n devient arbitrairement proche de l.

Exercice 5.8. Soit (u_n), (v_n) deux suites convergentes de nombres réels. Montrer que $u + v$ et uv sont des suites convergentes et exprimer leur limite en fonction de celles de u et de v.

On pourrait aussi parler de convergence vers $\pm\infty$; on dira que (u_n) tend vers $+\infty$ si elle satisfait la condition suivante :
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N u_n \geq M\ .$$

Exercice 5.9. Écrire avec des quantificateurs la définition de la phrase « (u_n) tend vers $-\infty$ ».

Exercice 5.10. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments (a_n) de A telle que (a_n) tend vers $\sup(A)$, et une suite d'éléments (b_n) de A telle que (b_n) tend vers $\inf(A)$ (on rappelle qu'on autorise les possibilités $\sup(A) = +\infty$, $\inf(A) = -\infty$).

Définition 5.11. Une suite de nombre réels (u_n) est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.12. *Toute suite convergente de nombre réels est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente de nombre réels. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| \leq 1$, autrement dit $u_n \in [l - 1, l + 1]$. Soit m le minimum des nombres $u_0, u_1, \ldots, u_N, l - 1$, et M le maximum des nombres $u_0, u_1, \ldots, u_N, l + 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq u_n \leq M$. Par conséquent (u_n) est bornée. □

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : il existe beaucoup de suites bornées non convergentes, par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 5.13. *Soit (u_n) une suite croissante majorée de nombres réels. Alors (u_n) est convergente.*

Démonstration. L'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n) est majoré ; soit M sa borne supérieure. Montrons que (u_n) converge vers M. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$; d'après la proposition 5.4, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon \leq u_N$. Comme (u_n) est croissante, on doit aussi avoir $M - \varepsilon \leq u_n$ pour tout $n \geq N$; comme de plus $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - M| = M - u_n \leq \varepsilon$, ce qui montre comme attendu que (u_n) converge vers M. □

Définition 5.14. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Une *sous-suite*, ou *suite extraite*, de (u_n) est une suite v obtenue en choisissant une suite (n_k) strictement croissante d'entiers et en posant

$$\forall k \in \mathbb{N} \ v_k = u_{n_k} \ .$$

Rappelons que si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers, alors $n_k \geq k$ pour tout k. En effet, $n_0 \in \mathbb{N}$ donc $n_0 \geq 0$; et si $n_k \geq k$ alors on a $n_{k+1} > n_k$ et donc $n_{k+1} > k$, d'où $n_{k+1} \geq k + 1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence.

Exercice 5.15. Montrer que, si (u_n) est une suite convergente de nombres réels, alors toute suite extraite (u_{n_k}) converge, vers la même limite que (u_n).

Vous avez-vu au premier semestre que de toute suite on peut extraire une sous-suite monotone ; en particulier, on a le résultat suivant.

Théorème 5.16 (Théorème de Bolzano–Weierstrass)**.** *Soit (u_n) une suite bornée de nombre réels. Alors (u_n) admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. La suite (u_n) admet une sous-suite monotone, qui est bornée puisque (u_n) l'est, et donc convergente en tant que suite monotone et bornée. □

Exercice 5.17. Soit (u_n) une suite de nombre réels. Montrer que :

1. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers une même limite l, alors (u_n) converge vers l.
2. Si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont toutes convergentes alors (u_n) converge.

Proposition 5.18. *Soit $(x_n), (y_n)$ deux suites de nombres réels telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \leq M \ \text{et} \ |y_n| \leq M \ .$$

Alors il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telles que les suites (x_{n_k}) et (y_{n_k}) convergent toutes les deux.

Démonstration. La suite (x_n) est une suite bornée de nombres réels : par le théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente (x_{a_k}), où (a_k) est une suite strictement croissante d'entiers. La suite (y_{a_k}) est une suite bornée de nombre réels, donc on peut en extraire une sous-suite convergente $(y_{a_{b_k}})$. Si on pose $n_k = a_{b_k}$, alors (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers, et

- (x_{n_k}) est une suite extraite de la suite (x_{a_k}) qui est convergente ; donc (x_{a_k}) converge.
- (y_{n_k}) est convergente.

□

Voyez-vous pourquoi, dans le raisonnement ci-dessus, on a d'abord extrait une sous-suite de (x_n), avant d'en réextraire une nouvelle suite ?

5.3 Limite d'une fonction en un point

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dira que $x \in \mathbb{R}$ est *adhérent à* A s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Exercice 5.19. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ |x - a| \leq \varepsilon \ .$$

Définition 5.20. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$ un point adhérent à A. On dit que f admet l pour limite en x si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \ |a - x| \leq \delta \Rightarrow |f(a) - l| \leq \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{a \to x} f(a) = l$.

On dit que f tend vers $+\infty$ en x si

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \ |a - x| \leq \delta \Rightarrow f(a) \geq M \ .$$

Enfin, f tend vers $-\infty$ en x si $-f$ tend vers $+\infty$, ou encore

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \ |a - x| \leq \delta \Rightarrow f(a) \leq M \ .$$

Notons que, dans la définition ci-dessus, on ne suppose pas a priori que x appartient à A ; et si on change le domaine de définition de f (c'est-à-dire, si on change A) alors l'existence de la limite peut être affectée. Par exemple, si on considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, alors f n'admet pas de limite en 0 ; mais si on considère la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors elle admet une limite en 0, qui vaut 0.

L'existence d'une limite pour une fonction f en un point se traduit en une propriété de l'image par f des suites qui convergent vers ce point.

Exercice 5.21. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ une fonction, $x \in \mathbb{R}$ un point adhérent à A et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Montrer que $\lim\limits_{a \to x} f(a) = l$ si, et seulement si, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$.

En particulier : s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers x et telle que $(f(a_n))$ n'est pas convergente alors f n'a pas de limite en x !

Parfois on se contente de regarder si f a une limite à gauche ou à droite en x (c'est surtout intéressant quand A est un intervalle ; en pratique, nous allons nous concentrer sur le cas de fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$.)

Définition 5.22. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$ un point adhérent à A. On dit que f admet l pour limite à droite en x si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \ 0 \leq a - x \leq \delta \Rightarrow |f(a) - l| \leq \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{a \to x^+} f(a) = l$.

De même, on dit que f admet l pour limite à gauche en x si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in A \ 0 \leq x - a \leq \delta \Rightarrow |f(a) - l| \leq \varepsilon \ .$$

On note alors $\lim\limits_{a \to x^-} f(a) = l$.

On peut bien sûr aussi donner, comme ci-dessus, des définitions pour le fait d'avoir une limite à gauche ou à droite égale à $\pm\infty$, et on laisse le lecteur écrire cette définition ; de même pour la définition de la notion de limite d'une fonction en $\pm\infty$. Vous êtes invité(e) à relire vos notes de cours du premier semestre si vous ne vous sentez pas au point sur ces notions... Souvent c'est plus facile de raisonner avec des suites pour démontrer l'existence (ou l'inexistence) de limites de fonctions. Par exemple, démontrons le résultat suivant, que vous avez vu au premier semestre.

Proposition 5.23. *Soit A, B deux parties de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ et $g\colon B \to \mathbb{R}$ deux fonctions et x un point adhérent à B. On suppose que $g(B) \subseteq A$, $\lim_{b\to x} g(b) = L$ et $\lim_{a\to L} f(a) = l$. Alors*

$$\lim_{b\to x} f \circ g(x) = l \ .$$

Notons que ci-dessus on autorise les valeurs $\pm\infty$ pour l et L.

Démonstration. Soit (b_n) une suite d'éléments de B qui converge vers x. Alors $g(b_n)$ est une suite d'éléments de A qui tend vers L puisque $\lim_{b\to x} g(x) = L$; donc $f(g(b_n))$ tend vers l puisque $\lim_{a\to L} f(a) = l$. On vient de montrer que, pour toute suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers x la suite $f \circ g(b_n)$ tend vers l, autrement dit

$$\lim_{b\to x} f \circ g(x) = l \ .$$

□