Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - PMI - Analyse

Quelques questions de compréhension sur le cours du 15 avril :

Un exercice récapitulatif

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y + 3y^4}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{ et } \quad f(0,0) = a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer l'unique valeur de a pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Dans la suite, on prendra pour a cette valeur.
2. Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et les calculer.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
5. Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 2 de f en $(0,0)$.
6. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $f : U \longrightarrow V$. On suppose que la fonction f est différentiable en $a \in U$ et admet une fonction réciproque, notée g, différentiable en $b = f(a)$. Montrer que $p = q$.