Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre IV — Durée: 2 heures

Examen final du mercredi 10 mai 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^5$ du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ suivant :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0\}.$$

1. Donner une base de l'orthogonal de F.
2. Déterminer le projeté orthogonal $p_F(u)$ du vecteur $u = (0, 0, 1, 0, 2)$ sur le sous-espace vectoriel F.
3. En déduire $\inf\{x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_3)^2 + x_4^2 + (2 - x_5)^2 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in F\}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'on note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n et $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives de taille n.

1. (a) Soit $M = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in S_n^+(\mathbb{R})$. À l'aide de la définition d'une matrice symétrique positive, montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $m_{i,i} \geq 0$.
   (b) Rappeler à quelle condition sur son spectre une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est positive.
   (c) À l'aide de la question 1b, donner un exemple de matrice symétrique réelle positive de taille 2 ayant des coefficients négatifs stricts.
2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que la matrice $B' = P^{-1}BP$ appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $B' \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(DB')$.
   (c) À l'aide de la question 1a, montrer que si A est positive, alors $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 3. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Soient a et b deux réels. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}a \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'ensemble des réels a et b pour lesquels f est un endomorphisme orthogonal indirect (ou négatif).
2. On suppose désormais que $a = b = -\frac{1}{2}$ (f est donc un endomorphisme orthogonal indirect).
   (a) Donner la nature géométrique de f (on ne demande pas encore ses caractéristiques).
   (b) Déterminer une base orthonormée (u) de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.
   (c) Rappeler la forme de la matrice de f dans une base orthonormée directe de la forme (u, v_2, v_3) de E.
   (d) Déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle = 2\langle x, x\rangle.$$

1. Pour $x, y \in E$, développer de deux manières différentes $\langle u(x+y), x+y\rangle$.
2. Montrer que l'adjoint de u est égal à $4\,\mathrm{Id}_E - u$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 5. On considère la fonction f 2π-périodique et paire définie par

$$\forall x \in [0; \pi], \quad f(x) = (x-\pi)^2.$$

1. Donner l'allure du graphe de f.
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f puis ses coefficients de Fourier exponentiels.
4. Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
5. Calculer explicitement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 6. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine.

1. Rappeler la définition de la structure canonique d'espace affine sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.
2. On considère

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 3-a-b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa direction et sa dimension.

Correction de l'examen terminal d'algèbre iv du 10 mai 2023

Correction de l'exercice 1

1. On peut remarquer, en notant $v = (1, 1, -1, -1, -1)$, que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \langle x, v\rangle = 0\} = (\mathrm{Vect}(v))^{\perp}.$$

Puisque $\mathbb{R}^5$ est un espace euclidien, on en déduit alors que

$$F^{\perp} = \left((\mathrm{Vect}(v))^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}(v).$$

Comme $v \neq 0_{\mathbb{R}^5}$, on en conclut que (v) est une base de $F^{\perp}$.

2. Comme $F^{\perp}$ est de dimension 1, il est plus simple de commencer par déterminer le projeté orthogonal de u sur $F^{\perp}$, noté $p_{F^{\perp}}(u)$. La famille (v) est une base orthogonale de $F^{\perp}$, avec $\|v\|^2 = 1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2 = 5$, ce qui entraîne que $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}v\right)$ est une base orthonormée de $F^{\perp}$. On peut donc utiliser la formule donnant la projection orthogonale sur ce sous-espace :

$$p_{F^{\perp}}(u) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}v, u\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}v = \frac{1}{5}(0+0-1+0-2)(1,1,-1,-1,-1) = -\frac{3}{5}(1,1,-1,-1,-1).$$

Par conséquent,

$$p_F(u) = u - p_{F^{\perp}}(u) = (0,0,1,0,2) + \frac{3}{5}(1,1,-1,-1,-1) = \frac{1}{5}(3,3,2,-3,7).$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
& \inf\{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2 + x_4^2 + (2-x_5)^2 \mid (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in F\} \\
= \ & \inf\{\|(0-x_1, 0-x_2, 1-x_3, 0-x_4, 2-x_5)\|^2 \mid (x_1,\dots,x_5) \in F\} \\
= \ & \inf\{\|u-x\|^2 \mid x \in F\} \\
= \ & (\inf\{\|u-x\| \mid x \in F\})^2 \ \text{ car l'ensemble est inclus dans } \mathbb{R}^+ \\
= \ & \|x - p_F(u)\|^2 \\
= \ & \|p_{F^{\perp}}(u)\|^2 \\
= \ & \frac{9}{5}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

1. (a) On sait que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. En prenant pour X le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on notera e_i, on obtient

$${}^te_iMe_i = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{1,i}\\ \vdots \\ m_{n,i}\end{pmatrix} = m_{i,i} \geq 0.$$

(b) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. La matrice M est positive si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$.

(c) Prenons par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, alors $M \in S_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M = \det\begin{pmatrix}X-1 & 1\\ 1 & X-1\end{pmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X(X-2)$$

ce qui entraîne $\mathrm{Sp}(M) = \{0;2\} \subset \mathbb{R}^+$. Ainsi, la matrice M est symétrique positive et possède des coefficients strictement négatifs.

2. (a) Par propriétés de la transposée, on a ${}^tB' = {}^t(P^{-1}BP) = {}^tP{}^tB{}^tP^{-1}$. Or $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tP = P^{-1}$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tB = B$. Ainsi, ${}^tB' = B'$ ce qui démontre que B' est symétrique réelle. Comme elle est semblable à la matrice B, ces deux matrices ont le même spectre, donc $\mathrm{Sp}(B') \subset \mathbb{R}^+$ et ainsi $B' \in S_n^+(\mathbb{R})$.

   (b) Puisque la matrice A est symétrique réelle, le théorème spectral entraîne l'existence d'une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Puisque pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(PDP^{-1}B) = \mathrm{Tr}(P(DP^{-1}B)) = \mathrm{Tr}(DP^{-1}BP) = \mathrm{Tr}(DB') \text{ où } B' = P^1BP \in S_n^+(\mathbb{R})$$

   par la question précédente.

   (c) Supposons $A \in S_n + (\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(D) \subset \mathbb{R}^+$. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B' = (b'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(DB') = \sum_{i=1}^{n} [DB']_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b'_{i,i}.$$

   Comme pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$, et $b'_{i,i} \geq 0$ par la question 1a puisque $B' \in S_n^+(\mathbb{R})$, on en conclut que $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$ en tant que somme de termes positifs.

Correction de l'exercice 3

1. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on dispose de l'équivalence : f est un endomorphisme orthogonal de E si, et seulement si, $A \in O_3(\mathbb{R})$. Or,

$$\begin{aligned}
A \in O_3(R) \quad &\iff \quad {}^tAA = I_3 \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 + \frac{1}{2} & 2ab + a \\ 0 & 2ab + a & 2b^2 + 2a \end{pmatrix} = I_3 \\
&\iff \quad \begin{cases} 2a^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ a(2b+1) = 0 \\ 2b^2 + 2a^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a = \pm\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, f est un endomorphisme orthogonal si, et seulement si, $a = \pm\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. On calcule alors le déterminant de f pour savoir si f est un endomorphisme direct ou indirect : en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis en développant par rapport à la première colonne,

$$\det(f) = \det(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}a \\ 0 & 2a & 2b \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{2}}b - 2\sqrt{2}a^2) = b - 2a^2 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{4} = -1$$

Finalement, f est un endomorphisme orthogonal indirect de E si, et seulement si, $a = \pm\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

2. (a) Puisque $a = b = -\frac{1}{2}$, f est un endomorphisme indirect de l'espace euclidien E de dimension 3. Il s'agit donc de la composée commutative d'une rotation r autour d'un axe D, avec la réflexion s par rapport à l'orthogonal de cet axe.

(b) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$. On a

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) &\iff (f + \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \\
&\iff (A + I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{par } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} x_3 = (1 + \sqrt{2})x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \\
&\iff x = x_1(e_1 + e_2 + (1 + \sqrt{2}))e_3
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 + (1 + \sqrt{2})e_3\}$. Par l'expression de la norme d'un vecteur à l'aide de ses coordonnées dans une base orthonormée, on a

$$\|e_1 + e_2 + (1 + \sqrt{2})\|^2 = 1^2 + 1^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{2}.$$

Si l'on pose $u = \dfrac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}(e_1 + e_2 + (1 + \sqrt{2})e_3)$, la famille (u) forme alors une base orthonormée de $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

(c) Dans une base orthonormée directe de E de la forme (u, v_2, v_3), la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ représente une mesure de l'angle orienté de la rotation r après avoir considéré que D est dirigé et orienté par le vecteur u.

(d) Comme $f \neq -\mathrm{Id}_E$ (car $A \neq -I_3$), on sait que l'axe D de la rotation r est égal à $\ker(f + \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(u)$. Il reste donc uniquement à déterminer l'angle orienté θ de la rotation. On a d'une part

$$\operatorname{Tr}(f) = -1 + 2\cos(\theta) \quad \text{d'où} \quad \cos(\theta) = \frac{1 + \operatorname{Tr}(A)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}.$$

De plus, si l'on considère le vecteur $x = e_1$, comme $x \notin D$, on sait que le signe de $\sin(\theta)$ est donné par le signe du produit mixte

$$\begin{aligned}
[u, x, f(x)] &= \det_{\mathcal{B}}(u, x, f(x)) \qquad \text{car } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée directe de } E \\
&= \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 + \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } C_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}} > 0
\end{aligned}$$

donc $\theta \equiv \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\right)$. La réflexion s (= symétrie orthogonale par rapport au plan $D^\perp$) étant entièrement caractérisée par la donnée de D, on a bien déterminé les caractéristiques géométriques de f.

Correction de l'exercice 4

1. Soient $x, y \in E$. On a d'une part par linéarité de u, et bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
\langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x) + u(y), x+y\rangle \\
&= \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle \\
&= 2\langle x, x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + 2\langle y, y\rangle \text{ par hypothèse sur } u
\end{aligned}$$

et d'autre part en utilisant directement l'hypothèse sur u,

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = 2\langle x+yx+y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 4\langle x,y\rangle + 2\langle y,y\rangle.$$

2. En égalant les deux expressions trouvées à la question précédente, on obtient : pour tous $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}
& 2\langle x,x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\langle x,x\rangle + 4\langle x,y\rangle + 2\langle y,y\rangle \\
\iff\ & \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 4\langle x,y\rangle \\
\iff\ & \langle u(x), y\rangle = 4\langle x,y\rangle - +\langle x, u(y)\rangle \text{ par symétrie du produit scalaire} \\
\iff\ & \langle u(x), y\rangle = \langle x, 4y - u(y)\rangle \\
\iff\ & \langle u(x), y\rangle = \langle x, (4\,\mathrm{Id}_E - u)(y)\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi, l'endomorphisme $4\,\mathrm{Id}_E - u$ vérifie la définition de l'adjoint, donc par unicité de celui-ci, $u^* = 4\,\mathrm{Id}_E - u$.

3. On peut remarquer que pour $v \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(-v)$ puisque pour $x \in E$, on a l'équivalence $v(x) = 0_E \iff -v(x) = 0_E$. Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(4\,\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp.$$

Comme E est un espace euclidien, on sait que $E = \mathrm{Im}(u) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Im}(u))^\perp$, donc $\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Correction de l'exercice 5

1. La restriction de f à $]0;\pi[$ est donnée par $x \longmapsto (x-\pi)^2$ qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le fermé $[0;\pi]$, ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0;\pi]$, puis sur $[-\pi;\pi]$ par parité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. De plus, par construction, la fonction f est continue sur l'ouvert $]0;\pi[$ et continue à droite en 0 (puisque $x \longmapsto (x-\pi)^2$ est continue sur $[0;\pi]$), et par parité, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, donc f est continue en 0. De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi^-} f(x) &= \lim_{x\to\pi^-} (x-\pi)^2 = 0 = f(\pi) \\
\text{et } \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x-2\pi) = \lim_{x\to-\pi^+} f(x) &= \lim_{x\to-\pi^+} f(-x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x)
\end{aligned}$$

donc f est aussi continue en π. Puisque f est paire et 2π-périodique, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de convergence normale, on en déduit que la série de Fourier de f converge normalement (et donc simplement) sur $\mathbb{R}$ vers f. Ainsi, f est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$. (On aurait aussi pu utiliser le théorème de Dirichlet en justifiant que la régularisée de f est égale à f sur $\mathbb{R}$.)

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier trigonométriques de f avec la notation usuelle. Puisque f est paire, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \text{ par parité de } f \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (t-\pi)^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On suppose désormais que $n \in \mathbb{N}^*$ afin de faire une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $u : t \longmapsto (t-\pi)^2$ et $v : t \longmapsto \dfrac{1}{n}\sin(nt)$ ce qui entraîne

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[(t-\pi)^2\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{ car } \sin(0) = 0 = \sin(n\pi) \text{ puisque } n \in \mathbb{N}^* \\ &= \frac{4}{\pi n}\left(\left[(t-\pi)\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{ de nouveau par I.P.P.} \\ &= \frac{4}{n^2} - \frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

De plus,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}(t-\pi)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Les coefficients de Fourier exponentiels de f, notés $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ vérifient

$$\forall n \in N, \quad c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \quad \text{ et } \quad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)).$$

Ainsi, $c_0(f) = \dfrac{1}{2}a_0(f) = \dfrac{\pi^2}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2}a_{|n|}(f) = \frac{2}{n^2}.$$

3. Puisque l'on a vu que f était égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$, on dispose de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

En particulier, pour $x = \pi$, on obtient alors (puisque $\cos(n\pi) = (-1)^n$) :

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi^2}{3} + f(\pi)\right) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

4. La fonction f est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc on peut appliquer le théorème de Parseval-Bessel :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \|f\|_2^2$$

où, par parité de $|f|^2$,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(t-\pi)^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}.$$

Ainsi,

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{4\pi^4/9}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Correction de l'exercice 6

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Munir E de sa structure canonique d'espace affine consiste à considérer E comme un espace affine de direction lui-même grâce à l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (u,v) & \longmapsto & \overrightarrow{uv} = v - u. \end{array}$$

2. On peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & = & \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 3-a-b & a-b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + F \text{ où } F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

   Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de direction F et de dimension $\dim(F) = 2$ (les deux matrices de la famille génératrice de F obtenue ci-dessus étant non colinéaires).