Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse IV Printemps 2013

Contrôle final - Analyse IV
juin 2013

Avant propos.

La durée de l'épreuve est de 2h. Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La répartition en durée de chacun des exercices n'est donnée qu'à titre indicatif. **Les réponses non justifiées ne seront pas comptabilisées.** Le soin apporté à la présentation sera également pris en compte dans la notation.

Questions de cours (15 minutes) (3 points)

1. (1,5 point) Énoncer sans les démontrer les propriétés de continuité et de dérivation de la somme d'une série entière.
2. (1,5 point) Énoncer sans le démontrer le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier.

Exercice 1 (45 minutes) (8 points)

1. (4 points) (20 min) On considère la série de fonctions $\sum f_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\ln(2 + x^2 + n)}.$$
   a. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum \frac{1}{\ln(2 + x^2 + n)}$ diverge.
   c. La série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normalement convergente ?
   d. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
   e. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est-elle continue ?
2. (4 points) (25 min) On considère la fonction f de période 2π définie pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ par
$$f(x) = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2}.$$
   a. Dessiner la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

b. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge au point x vers $f(x)$.

c. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont donnés sous forme complexe par

$$c_n = e^{in\pi} \frac{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}{2\pi} \frac{3}{9+n^2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

d. En déduire les coefficients de Fourier de f sous forme réelle.

e. Calculer, grâce aux résultats des questions précédentes, la valeur de la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{6}{9+n^2}$.

Exercice 2 (20 minutes) (4 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$4xf'' + 2f' + f = 0. \quad (E)$$

On cherche une solution $f : x \mapsto f(x)$, développable en série entière en 0 et vérifiant $f(0) = 1$.

a. Déterminer les coefficients de cette série entière.

b. Calculer son rayon de convergence.

Exercice 3 (40 minutes) (5 points)

On note $I =]0, +\infty[$ et pour tout $x \in I$ on considère l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt.$$

a. Montrer que cette intégrale converge, quel que soit $x \in I$.

b. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{-2}(1 - \cos(tx))e^{-t} dt$ est continue sur I.

b. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

c. Montrer que f' est dérivable et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t} dt$$

pour tout $x \in I$.

d. Calculer l'intégrale ci-dessus (question c.) en fonction de x.

e. En déduire l'expression de $f(x)$, pour tout $x \in I$.

Indication : on rappelle qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est la fonction arctan, et que les primitives d'arctan se calculent par intégration par parties.