Université Claude Bernard - Lyon 1 / Licence sciences et technologie
Math L2 / Unité d'enseignement « Fonctions de plusieurs variables »
Examen / vendredi 9 janvier 2015 / Durée 2h00

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur une feuille imprimée recto-verso.

Ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant, identifier sur votre copie votre Parcours (un des suivants : Math-Info ou Cursus Préparatoire).

Attention : Il s'agit de traiter les exercices 1, 2, 3 et <u>un seul</u> (au choix) des exercices 4 ou 5.

1. (2 points)

(a) Soit U une partie dans $\mathbb{R}^n$. Définir ce que veut dire la phrase « U est un ouvert ».

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui est deux fois continûment différentiable, et soit (a,b) un point critique de f. Définir la matrice hessienne de f en (a,b), et à l'aide de celle-ci, énoncer une condition qui implique que f admet un maximum local en (a,b).

2. (6 points) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par :

$$f(x,y,z) = \cos(x+y-z) + x^3 + y^3 + z - 5.$$

(a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(1,1,2)$ ainsi que le gradient de f en $(1,1,2)$.

(c) Montrer qu'il existe un ouvert W de $\mathbb{R}^2$ contenant $(1,1)$ et une application $\varphi : W \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tels que $\varphi(1,1) = 2$ et, pour tout $(x,y) \in W$, $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$.

(d) Déterminer le gradient de φ en $(1,1)$.

(e) Montrer que la matrice hessienne de φ en $(1,1)$ est $\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$.

(f) Écrire le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 au voisinage du point $(1,1)$.

3. (6 points) Soient $f,h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies comme suit :

$$f(x,y,z) = z^6 + 6z^2 - 12xy, \quad h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2.$$

On note S la surface de niveau $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = 0\}$.

(a) Prouver que la fonction f atteint ses bornes (c-à-d, son minimum et son maximum) sur la partie S.

(b) Montrer que le gradient de h en (x,y,z) est différent de 0 pour tout $(x,y,z) \in S$.

(c) Trouver les points où f atteint ses bornes (c-à-d, les points où le minimum et le maximum de f sont atteints).

Rappel : Un seul des exercices 4 ou 5 ci-dessous est à faire.

4. (6 points) On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2}. \end{array}$$

(a) Rappeler pourquoi toute norme sur $\mathbb{R}^2$ définit une application continue.

(b) (i) Montrer que N est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$ déterminer la différentielle de N au point (x,y), notée $\mathrm{d}N(x,y)$.

(c) Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de la dérivée directionnelle de N selon le vecteur v en $(0,0)$.

(d) N est-elle différentiable en $(0,0)$?

(e) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{N(x,y)+1}{N(x,y)^2}. \end{array}$

(i) Exprimer φ comme la composée de deux fonctions dont l'une est une fonction d'une seule variable réelle.

(ii) Montrer que φ est différentiable et déterminer sa différentielle au point (x,y), notée $\mathrm{d}\varphi(x,y)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. (6 points) On considère pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ la fonction g définie par

$$g(x,y) := x^2 + \frac{2x+4}{1+y} - 5x + 2y.$$

(a) Prouver que g est convexe sur $\mathbb{R}^2_+$.

(b) Prouver que la fonction $h(z) := \ln(1+z)$ est concave sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

(c) En déduire que la fonction $f(x,y,z) := g(x,y) - 2h(z)$ est convexe sur l'ouvert

$$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

(d) Prouver que f atteint un minimum par rapport à U au point $(2,1,1)$.