Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse IV Printemps 2012

Contrôle Final Écrit - Analyse IV
11 juin 2012

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte dans la notation.

Questions de cours (30 minutes) (6 points)

1. (3 points) Donner le développement en série entière en 0, avec son domaine de validité, des fonctions exp, cos, sin, ch (cosinus hyperbolique, aussi noté cosh), sh (sinus hyperbolique, aussi noté sinh), et $x \mapsto (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. (3 points) Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel. Énoncer sans le démontrer le théorème de Parseval.

Exercice 1 (45 minutes) (7 points)

1. Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+tx}\,dt.$$

a-t-elle un sens ? est-elle convergente ? Dans la suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note

$$F(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+tx}\,dt.$$

2. **Calcul de F(0) :** Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$\varphi(s) := \left(\int_0^s e^{-t^2}\,dt\right)^2, \quad \psi(s) := \int_0^1 \frac{e^{-s^2(\theta^2+1)}}{\theta^2+1}\,d\theta\,.$$

   (a) Calculer $\varphi(0)$ et $\psi(0)$.
   (b) Démontrer, en énonçant avec soin les théorèmes invoqués, que φ et ψ sont dérivables.
   (c) Montrer grâce à un changement de variables linéaire que $\psi'(s) = -2e^{-s^2}\displaystyle\int_0^s e^{-t^2}dt$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. En déduire la valeur de $\varphi'(s)+\psi'(s)$.

(d) Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bonus (2 points) : calculer cette intégrale par une autre méthode.

3. La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$? On justifiera la réponse en énonçant avec soin le théorème invoqué.
4. La fonction F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$? On justifiera la réponse en énonçant avec soin le théorème invoqué.

Exercice 2 (45 minutes) (7 points)

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$? Dans la suite, on note f sa somme, c'est-à-dire que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

pour tout x tel que cette série converge.

2. Démontrer que f est définie et continue sur $[-1, 1]$.
3. Démontrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $f'(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$, si $x \neq 0$.
4. Démontrer que la fonction $x \in]0, 1[\mapsto f(x) + f(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$ est constante.
5. Démontrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f(x) + f(1-x) + \ln(x)\ln(1-x) = f(1)\,.$$

6. Sachant que $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 3 (BONUS : 4 points)

Soient $c \in]0, \pi[$ et f la fonction périodique de période 2π valent 1 pour $|x| \leq c$ et 0 pour $c < |x| \leq \pi$.

1. Dessiner la courbe représentative de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f en formulation réelle (c'est-à-dire les a_n et b_n).
3. La série de Fourier de f converge-t-elle simplement ? Sa somme est-elle égale à f ? On justifiera la réponse en énonçant avec soin le théorème invoqué.
4. Démontrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nc)}{n}$ converge et calculer sa somme.
5. Démontrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(nc)}{n^2}$ converge et calculer sa somme.