Ex 6 (TD 3) $a, b \in \mathbb{R}$. $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

a) A orthogonale ssi $\begin{cases} 2ab + b^2 = 0 & (1) \\ a^2 + 2b^2 = 1 & (2) \end{cases}$

On fait $(2) - (1)$ et on a $(a-b)^2 = 1$

On en déduit $a - b = \pm 1$.

- Si $a = 1 + b$ on remplace dans (1) et on trouve $b(3b+2) = 0$. Ceci donne 2 solutions: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 1/3 \\ b = -2/3 \end{cases}$.
- Si $a = -1 + b$ de la même façon on trouve 2 solutions $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a = -1/3 \\ b = 2/3 \end{cases}$

b)
- Si $a = 1, b = 0$ $f = id$
- Si $a = -1, b = 0$ $f = -id$
- Si $a = -1/3$ $b = 2/3$ on calcule $\det A = 1$

  f est donc une rotation. Comme A symétrique c'est aussi une symétrie orthogonale. Dans une base adaptée sa matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i.e l'angle de la rotation est π. Pour trouver l'axe on calcule $\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
- Si $a = 1/3$ $b = -2/3$ $\det A = -1$. De plus f est une symétrie orthogonale donc c'est une réflexion. Le plan de la réflexion est donné par $\operatorname{Ker}(A - I)$. On calcule et on a $\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.