

Exercices TD3

ex 5.
$$A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

- On vérifie que les colonnes de A forment une base orthonormée donc A est orthogonale
- On calcule $\det A = 1$ donc A est la matrice d'une rotation ($\neq id$).
- On calcule $\text{Ker}(A - I)$ pour trouver l'axe de rotation :

$$\text{Ker}(A - I) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

- On choisit un vecteur unitaire qui oriente l'axe

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} \\ 0 \\ 4/\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

- On sait que dans une base commençant par e_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ donc } 1 + 2\cos \theta = \text{Tr} A$$

On déduit $\cos \theta = -\frac{16}{18}$

- On choisit $x \in \{e_1\}^\perp$ par ex $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et on calcule $[e_1, x, Ax] = \frac{1}{\sqrt{17}}$

qui est du signe de $\sin \theta$

- donc $\theta \in [0, \pi]$ et $\theta = \text{Arccos} \left(-\frac{16}{18} \right)$

CONCLUSION

A est la matrice de la rotation d'axe orienté et dirigé par e_1 et d'angle $\text{Arccos} \left(-\frac{16}{18} \right)$