Equations différentielles linéaires aux coefficients constants.

Système de n équations d'ordre 1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

où $\mathbf{x}(t) \in K^n$, $A \in M_n(K)$, $K =$ R ou C. Une solution est une fonction $\varphi : I \to K^n$ définie sur un intervalle I et vérifiant $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

Propriétés générales.

1.1. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel sur K (conséquence de la linéarité de l'équation). [On verra que sa dimension est n.]

1.2. Si $\varphi(t)$ est une solution et $c \in$ R, alors $\varphi(t+c)$ l'est aussi (conséquence du fait que A est à coefficients constants).

1.3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et $\mathbf{z}(t)$ une solution *complèxe*: $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, $(\mathbf{z}(t) \in \mathrm{C}^n)$. Alors la partie réelle $\mathbf{x}(t) = Re(\mathbf{z}(t))$ et la partie imaginaire $\mathbf{y}(t) = Im(\mathbf{z}(t))$ de la solution complèxe sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

1.4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$. Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres donne n solutions de $x' = Ax$ linéairement indépendentes (et toute autre solution sera leur combinaison linéaire).

1.5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $x = Py$, le système différentiel $x' = Ax$ est transformé en $y' = By$ avec $B = P^{-1}AP$. Pour simplifier le système on cherche à réduire la matrice A à une forme "simple".

Si A est diagonalisable, $B = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, le système $y' = By$ est scindé (séparation des variables complète): $y_1' = \lambda_1 y_1$, ... , $y_n' = \lambda_1 y_n$. Toutes ses solutions sont donnés par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, ... , $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$. [Ici $c_i = y_i(0)$.]

Si A n'est par diagonalisable, on peut la ramener à la forme de Jordan (sur C); dans ce cas le système se décompose en sous-systèmes indépendants dans chaque bloc de Jordan (séparation des variables partielle).

Dans un bloc de Jordan de dimension k on a le système

$y_1' = \lambda y_1$, $y_2' = \lambda y_2 + y_1$,..., $y_k' = \lambda y_k + y_{k-1}$.

La solution générale est $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $y_2(t) = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t}$, ... ,

$y_k(t) = (c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + ... + c_k)e^{\lambda t}$. [Ici $c_i = y_i(0)$.]

.

Conclusion: pour tout $y_0 \in \mathrm{C}^n$ il existe une solution unique $y(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$. En revenant au système $x' = Ax$, on a :

1.6. Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout $x_0 \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur R à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$.

.

1.7. Corollaire. L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $x' = Ax$ définies sur R est de dimension n. Pour tout $t_0 \in R$ l'application $\mathcal{S} \to K^n$ qui à une solution φ fait correspondre sa valeur $\varphi(t_0)$ est un isomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $(\varphi_1 ,..., \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$;

2) Pour un t_0, $(\varphi_1(t_0) ,..., \varphi_n(t_0))$ est une base de K^n;

3) Pour tout t, $(\varphi_1(t) ,..., \varphi_n(t))$ est une base de K^n.

.

1.8. Structure des solutions. En réduisant la matrice A à la forme de Jordan, on déduit que toute composante d'une solution *complexe* est une combinaison linéaire de fonctions $t^p e^{\lambda t}$, où λ est une valeur propre de A et $p < l_\lambda$; ici où l_λ est la dimension maximal des blocs de Jordan associés à λ (qui est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A).

Toute composante d'une solution *réelle* est donc une une combinaison linéaire de termes $t^p e^{\lambda t}$ (pour les valeurs propres λ réelles) et $t^p e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t^p e^{\alpha t}\sin(\beta t))$, (pour les valeurs propres λ complèxes, où $\lambda = \alpha + i\beta$), et $p < l_\lambda$.

.

1.9. Proposition. *Comportement asymptotique des solutions.* Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) Pour toute solution φ on a $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

2) Toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Equation scalaire d'ordre n.

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = 0(*)$$

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en introduisant de nouvelles inconnues: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_n = x^{(n-1)}$. Le système s'écrit $x_1' = x_2$, ..., $x_{n-1}' = x_n$, $x_n' = -(a_0x_1 + ... + a_{n-1}x_n)$, donc $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $\mathbf{x} = (x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$ et A est la matrice compagnon:

$a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = -a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

.

On sait que le polynôme caractéristique de A est

$p_A(z) = (-1)^n(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0)$, et on sait que le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique; donc pour chaque valeur propre il y a un seul bloc de Jordan (les espaces propres sont tous de dimension 1). On en déduit:

.

1.10. Proposition. Soit $p_A(z) = (-1)^n(z-\lambda_1)^{m_1}...(z-\lambda_k)^{m_k}$. Les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$, où $j = 1, ..., k$ et $0 \leq p_j < m_j$ forment une base (complèxe) des solutions de l'équation (*).

Toute solution s'écrit donc comme $\sum_1^k q_j(t)e^{\lambda_j t}$, où $q_j(t)$ sont des polynômes, $\deg(q_j) < m_j$.

Si les coefficients $a_0, ..., a_{n-1}$ sont réels, une base des solutions reélles est donnée par les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$ (pour les λ_j réelles) et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$ et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t))$ (pour les λ_j complèxes, où $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$) et $0 \leq p_j < m_j$.

.

En vu de ce résultat, on n'a pas besoin de passer par la matrice, mais on peut traiter l'équation (*) directement:

1.11. Lemme. λ est une racine du polynôme caractéristique

$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ de multiplicité m si et seulement si les "monômes" $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$,..., $t^{m-1}e^{\lambda t}$ vérifient l'équation différentielle (*).

•• *Démonstration.* Faisons dans l'équation (*) la substitution suivante : $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. On a $\frac{d}{dt}(ue^{\lambda t}) = (\frac{d}{dt}u + \lambda u)e^{\lambda t} = (\frac{d}{dt} + \lambda)ue^{\lambda t}$.

Donc l'équation (*) devient

$(\frac{d}{dt} + \lambda)^n u + a_{n-1}(\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}u + ... + a_1(\frac{d}{dt} + \lambda)u + a_0 u = 0$ (**)

ou, si on développe,

$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_0 u = 0.$

Pour le polynôme caractéristique $\tilde{p}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ de (**) on a $\tilde{p}(z) = p(z+\lambda)$ (facile à vérifier). Donc λ est une racine de $p(z)$ de multiplicité m si et seulement si 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m, ce qui veut dire que $b_0 = 0$, ... $b_{m-1} = 0$.

L'équation (**) devient $u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_m u^{(m)} = 0$ et admet donc des solutions $1, t, ..., t^{m-1}$. Reciproquement, si (**) admet des solutions $1, t, ..., t^{m-1}$, alors $b_0 = 0$, ... $b_{m-1} = 0$ et 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m. ••

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$, ..., $x^{(n-1)}(0) = c_n$ il faut

1) résoudre l'équation caractérfistique $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation différentielle (sans passer par la matrice);

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition 1.10 avec des coefficients indéterminés et

calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).

.

Exponentielle d'une matrice.

.

2.1. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathrm{C})$. La série

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

converge (absolument). La somme de la série

$$e^{tA} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$$

est dérivable par rapport à t et

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

2.2. Corollaire Pour $v \in K^n$ la solution φ_v de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi_v(0) = v$ est donnée par $\varphi_v(t) = e^{tA} v$.

.

2.3. Proposition.

1) e^{tA} est l'unique solution de l'équation différentielle matricielle $\frac{d}{d} U(t) = AU(t)$ vérifiant la condition initiale $U(0) = Id$.

2) Changement de base: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$.

.

Cas diagonalisable: si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $e^A = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

Donc pour calculler l'exponentielle il faut passer à une base adaptée.

.

2.4. Lemme. Si $AB + BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

En pârticulier, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

On a donc $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$: la famille $\{e^{tA}\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

.

2.5. Cas général. Soit $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford (ou de Jordan) et $\mathcal{N}^{l+1} = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{t\mathcal{D} + t\mathcal{N}} = e^{t\mathcal{D}}(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + ... + t^l\mathcal{N}^l/l!)$$

Utilisation des projecteurs spectraux. Rappeleons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur le sous-espace caractéristique associé à λ_i, et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$e^{t\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \Pi_i$$

On en déduit la structure des éléments de e^{tA} en tant que fonctions de t.

Remarque. Les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiants les conditions initiales particulières: sa j-ème colonne ψ_j vérifie $\psi_j(0) = e_j$, le j-ème vecteur canonique.

En fait, e^{tA} contient autant d'information que n'importe quelle base des solutions:

2.6. Lemme. Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une base des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Alors $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

.

2.7. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de A. Alors $(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A.

b) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

(La démonstration se fait par la trigonalisation.)

.

Exemple en dimension 2.

Soit le polynôme caractéristique $p_A(z) = z^2 + az + b$.

Cas 1: racines simples $\lambda \neq \mu$. Alors

$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(A - \mu I)$ et $\Pi_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}(A - \lambda I)$. Ensuite

$e^A = e^\lambda \Pi_\lambda + e^\mu \Pi_\mu = \frac{1}{\lambda-\mu}[(e^\lambda - e^\mu)A - (\mu e^\lambda - \lambda e^\mu)I$.

.

Cas particulier: $a = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et on a

$e^A = \frac{1}{2\lambda}(e^\lambda - e^{-\lambda})A + \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda})I$.

Oscillations harmoniques: si $a = 0$ et en plus $b > 0$, alors λ est imaginaire, $\lambda = i\omega$, et $e^A = \frac{1}{\omega}\sin\omega A + \cos\omega I$. De même,

$e^{tA} = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)A + \cos(\omega t)I$.

.

Cas 2: racine double λ. Alors $A = \lambda I + N$ où N est nilpotente: $N^2 = 0$. On a $e^A = e^\lambda(I + N)$.

.

L'exponentielle et la méthode d'Euler.

.

2.8. Proposition. $e^A = \lim_{n\to\infty}(I + A/n)^n$.

Système non homogène: méthode de la variation des constantes.

On considère l'équation non-homogène:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$$

.

2.9. *"Principe de superposition":* **a)** Soit $x' = Ax + b_1$ et $y' = Ay + b_2$. Alors $z(t) = x(t) + y(t)$ vérifie $z' = Az + (b_1 + b_2)$.

b) *Toute solution de l'equation non-homogène $x' = Ax + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y' = Ay$.*

On cherche la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}y(t)$. On obtient pour $y(t)$ l'équation $y'(t) = e^{-tA}b(t)$, d'où la

2.10. Formule de Duhamel:

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Dans cette formule $x(t)$ est la somme de deux termes: $u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds$ est la solution particulière de l'équation $x' = Ax + b(t)$ vérifiant la condition initiale $u(0) = 0$ et $v(t) = e^{tA}x(0)$ est la solution de l'équation homogène vérifiant la condition initiale $v(0) = x(0)$.

2.11. Corollaire: l'existence et l'unicité. Soit $b : I \to K^n$ une fonction continue définie sur un intervalle I. Pour tout $x_0 \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$ définie sur I à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$.

.

Equation linéaire non homogène d'ordre n

On considère l'équation

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = f(t)(*)$$

2.12. Réduction d'ordre.

Cherchons la solution sous la forme $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. Notre équation devient

$$[u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_1u' + b_0u]e^{\lambda t} = f(t)$$

(Voir la démonstration du Lemme 1.11 .)

Soit λ une racine de l'équation caractéristique

$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$. Alors $b_0 = 0$.

Posons $y(t) = u'(t)$; il reste à résoudre l'équation d'ordre $n-1$:

$$y^{(n-1)} + b_{n-1}y^{(n-2)}... + b_1 y = e^{-\lambda t}f(t)$$

En itérant cette procédure de réduction d'ordre on arrive à la fin à l'equation de la forme $v'(t) = g(t)$.

.

Remarque. On vérifie facilement que le polynôme caractéristique $\tilde{p}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ est lieé au polynôme caractéristique $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ par $\tilde{p}(z) = p(z+\lambda)$. (Voir Lemme 1.11.)

.

Exemple d'ordre 2: $x'' + ax' + bx = f(t)$. Soit λ une racine de l'équation caractéristique: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. On pose $x(t) = e^{\lambda t}u(t)$, ce qui donne
$u'' + (2\lambda + a)u' = e^{-\lambda t}f(t)$, ou $y' + \rho y = e^{-\lambda t}f(t)$; ici $\rho = 2\lambda + a$.

Soit $y(t) = e^{-\rho t}v(t)$, alors $v'(t) = e^{(\rho-\lambda)t}f(t)$. Noter que $\rho - \lambda = \lambda + a = -\mu$, où μ et la deuxième racine de l'équation caractéristique. Donc on a $v'(t) = e^{-\mu t}f(t)$ et on trouve $v(t)$ par intégration.

.

2.13. *Utilisation de la formule de Duhamel.*

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en introduisant de nouvelles inconnues: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_n = x^{(n-1)}$. Le système s'écrit $x_1' = x_2$, ..., $x_{n-1}' = x_n$, $x_n' = -(a_0 x_1 + ... + a_{n-1}x_n) + f(t))$, donc $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + b(t)$ où $\mathbf{x} =^t (x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$, $b(t) =^t (0, ..., 0, f(t)$ et A est la matrice compagnon: $a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = -a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

On va écrire e^{tA} en supposant que l'équation caractéristique à n racines distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors $e^{\lambda_1 t}$, ... , $e^{\lambda_n t}$ est une base des solutions de l'équation (*). A partir de cette base on peut fabriquer une solution fondamentale $\Phi(t)$ de l'équation $U' = AU$: $\Phi(t)_{ij} = (e^{\lambda_i t})^{(j-1)} = \lambda_i^{j-1}e^{\lambda_i t}$. Par conséquent, $e^{tA} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$. [Noter que $\Phi(0)_{ij} = \lambda_i^{j-1}$.]

Ensuite on utilise la formule de Duhamel: pour la première composante $x(t)$ du solution vectorielle $\mathbf{x}(t)$ on a $x(t) = \sum_j (e^{tA})_{1j}c_j + \int_0^t (e^{(t-s)A})_{1n}f(s)ds$. $(c_1, ...c_n)$ est le vecteur des conditions initiales: $x(0) = c_1$, ... ,$x^{n-1}(0) = c_n$.

.

"Quasipolynômes"

Souvant le second membre $f(t)$ dans l'équation (*) est de la forme $q(t)e^{\mu t}$, où $q(t)$ est un polynôme en t:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_1 x' + a_0 x = q(t)e^{\mu t}$$

Proposition 2.14. Soit $q(t)$ un polynôme de degré k. Si μ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière (complèxe) de la forme $u(t) = r(t)e^{\mu t}$, où $r(t)$ est un polynôme de degré k. Si μ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité m, il existe une solution particulière de la forme $u(t) = r(t)e^{\mu t}$ où $r(t)$ est un polynôme de degré $k + m$.

.

Remarque: Pour déterminer le polynôme $r(t)$ il suffit de mettre $u(t) = r(t)e^{\mu t}$ dans l'équation.

.

•• *Démonstration:* on procède par récurrence sur le degré de l'équation. Soit λ une racine du polynôme caractéristique $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Cherchons la solution sous la forme $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$; posons $y(t) = u'(t)$. Notre équation devient

$$y^{(n-1)} + b_{n-1}y^{(n-2)} ... + b_1 y = q(t)e^{(\mu-\lambda)t}$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe une solution de la forme

$y(t) = s(t)e^{(\mu-\lambda)t}$, où le degré de $s(t)$ est $k + l$ et l est la multiplicité de $(\mu - \lambda)$ en tant que racine du polynôme

$z^{n-1} + b_{n-1}z^{n-2} + ... + b_1 = (z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z)/z = \tilde{p}(z)/z$.

.

On sait que $\tilde{p}(z) = p(z + \lambda)$. (Voir Lemme 1.11.) Il y a deux cas:

a) $\mu - \lambda = 0$. Vu que $u'(t) = s(t)$, l'intégration donne

$u(t) = \int s(t)dt = r(t)$ où $r(t)$ est un polynôme de degré $k + l + 1$. On a $x(t) = r(t)e^{\mu}$.

Mais la multiplicité l de $0 = \mu - \lambda$ dans $\tilde{p}(z)/z = p(z + \lambda)/z$ est égale à $m - 1$ (ici m est la multiplicité de μ dans $p(z)$) et donc $k + l + 1 = k + m$.

.

b) $\mu - \lambda \neq 0$. Vu que $u'(t) = s(t)e^{(\mu-\lambda)t}$, l'intégration donne $u(t) = \int s(t)e^{(\mu-\lambda)t}dt = r(t)e^{(\mu-\lambda)t}$ où $r(t)$ est un polynôme de degré $k + l$. On a $x(t) = r(t)e^{\mu}$. Mais la multiplicité l de $\mu - \lambda$ dans $p(z + \lambda)/z$ est la même que la multiplicité de μ dans $p(z)$: $l = m$. ••