Partie CCP - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1. (Environ 30min) Un développement asymptotique de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Un équivalent de H_n :

   Soit n un entier naturel non nul. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Si k est un entier naturel non nul, montrer que $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire l'encadrement $\ln n + \dfrac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$.

   (c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. Suites adjacentes :

   Soient deux suites de réels $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ adjacentes, c'est-à-dire que $(v_n)_n$ est croissante, $(w_n)_n$ est décroissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$. En déduire que la suite $(v_n)_n$ est majorée.

   (b) Montrer de même que la suite $(w_n)_n$ est minorée.

   (c) En déduire que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. Constante d'Euler :

   On pose, pour $n \geq 1$, $c_n = H_n - \ln n$, et $d_n = c_n - \dfrac{1}{n}$.

   (a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$.

   (b) Montrer que les suites $(c_n)_n$ et $(d_n)_n$ convergent vers une même limite. On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

   (c) Montrer que $H_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$.

Problème 2. (Environ 1h) Un problème d'algèbre.

1. **Partie 1** :

   Soit θ un réel. On considère la suite réelle $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} x_1 = \sin(\theta), \\ -2x_1\cos(\theta) + x_2 = 0, \\ \text{et pour tout } p \geq 1,\ x_p - 2x_{p+1}\cos(\theta) + x_{p+2} = 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer x_2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_p = \begin{cases} \sin(p\theta) & \text{si } \theta \not\equiv 0 \mod \pi \\ 0 & \text{si } \theta \equiv 0 \mod \pi \end{cases}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, à quelle condition sur θ a-t-on $x_{n+1} = 0$?

2. **Partie 2** :

Pour t réel, on note $A_n(t) = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

(1). pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les coefficients de la diagonale sont $a_{i,i} = 2t$,

(2). pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ tel que $|i-j| = 1$, $a_{i,j} = 1$,

(3). dans tous les autres cas, $a_{i,j} = 0$.

On note $d_n(t) = \det(A_n(t))$.

(a) Quelques valeurs de $d_n(t)$:

i. Calculer $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$, $d_4(t)$.

ii. Pour $n \geq 3$, établir une relation entre $d_n(t)$, $d_{n-1}(t)$ et $d_{n-2}(t)$. En déduire que d_n est un polynôme en t, déterminer son degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

(b) On suppose $|t| < 1$, et on note $t = \cos(\theta)$ avec $0 < \theta < \pi$.

i. Montrer que $d_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

ii. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $d_n(\cos(\theta)) = 0$.

(c) On note $\chi_n(\lambda) = \det(A_n(0) - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice $A_n(0)$.

i. Exprimer $\chi_n(\lambda)$ en fonction de d_n et de λ.

ii. Déduire de 2.(b).ii que la matrice $A_n(0)$ possède n valeurs propres distinctes et donner ces valeurs propres. Montrer que la plus grande valeur propre est $\rho = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

iii. (a). Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A_n(0)$ associé à la valeur propre ρ. Trouver des relations entre les coordonnées x_i.

(b). En utilisant 1.(b) et en choisissant soigneusement les valeurs x_0 et x_{n+1} de la suite $(x_n)_n$ ainsi que le réel θ, déterminer un vecteur propre de la matrice $A_n(0)$ associé à la valeur propre ρ, dont toutes les composantes sont strictement positives.