Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2012
Math IV - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 2
Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1
Dans cet exercice, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbf{R}$.
Pour u et v dans $\mathcal{C}$, on pose :

$$\langle u \mid v\rangle = \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

1) Montrer que $\langle\,|\,\rangle$ est un produit scalaire (défini positif) sur $\mathcal{C}$.

2) a) Montrer que pour tout $m \geq 0$ et tout φ réel :

$$\sin[(m+2)\varphi] = 2\cos\varphi \sin[(m+1)\varphi] - \sin(m\varphi).$$

b) Expliciter un polynôme constant U_0 et un polynôme U_1 de degré 1 tels que pour tout $\varphi \in \mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$:

$$U_0(\cos\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} \qquad \text{et} \qquad U_1(\cos\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{\sin\varphi}.$$

c) Montrer, en effectuant une récurrence forte sur $n \geq 0$ que pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme U_n de degré n tel que, pour tout $\varphi \in \mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$:

$$U_n(\cos\varphi) = \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi}.$$

3) a) Montrer que pour $i \neq j$, U_i et U_j sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\,|\,\rangle$.
Indication : dans l'intégrale à calculer, on effectuera le changement de variables $\varphi = \operatorname{Arccos} t$.

b) Par le même changement de variable, calculer $\|U_n\|$.

Exercice 2
Pour tout x réel positif ou nul et tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

1) a) Montrer que la **suite** de fonctions (u_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbf{R}^+$.

b) Cette convergence est-elle uniforme ?

2) Montrer que la **série** de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers une fonction qu'on notera U dans la question suivante.

3) a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n''$ converge normalement sur $\mathbf{R}^+$.

b) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^2$.

4) a) Montrer que pour tout $y \in [0,1]$:

$$y(\ln 2) \leq \ln(1+y) \leq y.$$

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$-\frac{1}{2n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leq 0.$$

(Il pourra être utile de savoir que $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$).

c) Soit $n \geq 1$. Étudier les variations de u'_n sur $\mathbf{R}^+$ et en déduire la valeur de :

$$\|u'_n\|_{\infty,\mathbf{R}^+}.$$

d) Montrer que la série $\Sigma u'_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbf{R}^+$.

e) Soit $n \geq 1$. Par comparaison séries-intégrales, montrer que :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq \ln 2.$$

f) Soit $n \geq 1$. Montrer que la fonction $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} u'_k$ admet en $+\infty$ une limite l_n qui vérifie l'inégalité :

$$l_n \geq (\ln 2)^2.$$

g) En déduire que la série $\sum u'_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on se place dans E, espace euclidien de dimension finie n.
On dira qu'une famille $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est **obtusangle** lorsque pour tous $i \neq j$ dans $\{0, \ldots, p\}$:

$$\langle v_i \mid v_j \rangle < 0.$$

1) Dessiner une famille obtusangle formée de trois vecteurs d'un même plan.

2) Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ une famille obtusangle de vecteurs de E. Montrer que pour tous réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$:

$$\|\sum_{i=0}^{p} |\alpha_i| v_i\|^2 \leq \|\sum_{i=0}^{p} \alpha_i v_i\|^2.$$

3) L'objectif de la question est de montrer que pour tous vecteurs $v_0, v_1 \ldots, v_p$ de E :

$$(v_0, v_1, \ldots, v_p) \text{ est obtusangle} \qquad \Rightarrow \qquad (v_1, \ldots, v_p) \text{ est libre.}$$

(N.B. : votre attention est attirée sur le fait que la famille à gauche commence par v_0 celle à droite par v_1. Ce n'est pas une faute de frappe !).
Pour montrer cet énoncé, on prend $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$.
On note $A = \{i \mid \lambda_i > 0\}$, $B = \{j \mid \lambda_j \leq 0\}$ et $u = \displaystyle\sum_{i \in A} \lambda_i v_i$.

a) Montrer que $u = -\displaystyle\sum_{j \in B} \lambda_j v_j$.

b) En écrivant que :

$$\|u\|^2 = -\langle \sum_{i \in A} \lambda_i v_i \mid \sum_{j \in B} \lambda_j v_j \rangle,$$

montrer que $u = 0$.

c) En calculant $\langle v_0 \mid u \rangle$, montrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et conclure.

4) Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ une famille obtusangle formée de $n+1$ vecteurs de E (on rappelle que n désigne la dimension de l'espace E).

a) En utilisant le 3), montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

b) On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les coordonnées de v_0 dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$.
En appliquant le 2) à $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = \mu_1, \ldots, \alpha_n = \mu_n$, montrer que pour tout i entre 1 et n le réel μ_i est négatif ou nul.