
Partie commune - Devoir numéro 6

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.
Les exercices sont indépendants.

Partie Algèbre
Partie Analyse

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$I_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \; I_n(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}.$$

1. Montrer que la fonction I_n est bien définie. L'application $(x,t) \mapsto t^2 + x^2$ n'e s'annule pas sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}^+$, donc $f(x,t) = 1/(t^2+x^2)^n$ est bien définie et continue comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Elle est donc intégrable en t sur tout segment de $\mathbb{R}^+$. De plus, $f \leq 1/t^{2n}$. L'intégrale $\int^{+\infty} 1/t^{2n}$ est de Riemann avec un exposant $2n > 1$, donc converge. Par comparaison, $\int^{+\infty} f(x,t)dt$ converge et au total, $I_n(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$. (Attention, l'intégrale $\int_0 1/t^{2n}$ diverge !)
2. Montrer que I_n est continue en x. Soient $0 < a < b$ et $J_{ab} = [a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, $|f| \leq g(t) = 1/(t^2 + a^2)^n$ avec g continue et intégrable d'après la question précédente. D'après le théorème de continuité pour les intégrales généralisées à paramètres, l'application I_n est continue sur J_{ab} pour tout $0 < a < b$ (ici b ne sert à rien), donc sur $\mathbb{R}_*^+$ puisque la continuité est une propriété locale.
3. Montrer que I_n est dérivable, et déterminer sa dérivée en fonction de x et I_{n+1}. On a $\partial_x f = -2nx/(t^2 + x^2)^{n+1}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+$ et continue en (x,t), de plus, sur J_{ab}, $|\partial_x f| \leq 2nb/(t^2 + a^2)^{n+1}$ qui est continue et intégrable sur R_+^* d'après la question précédente. Par le théorème de dérivabilité pour les intégrales généralisées, I_n est dérivable sur J_{ab} et de dérivée $F'(x) = \int_0^\infty -2nx/(t^2+x^2)^{n+1}dt = -2nxI_{n+1}$.
4. Déterminer la fonction I_1. $I_1 = \int_0^{+\infty} 1/(t^2 + x^2)dt$. On effectue le changement de variable $t = ux$. Donc $I_1 = \frac{1}{x}\int_0^\infty 1/(u^2+1)du = \frac{1}{x}[\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2x}$.
5. En déduire l'intégrale $I_2(x)$, puis $I_3(x)$. On a $I_{n+1} = I_n'/(-2xn)$, donc $I_2 = (-\pi/2x^2)/(-2x) = \pi/4x^3$, et $I_3 = (-3\pi/4x^4)/(-4x) = 3\pi/16x^5$.

Exercice 2. On définit la fonction

$$F :] -1, \infty[\to \mathbb{R}, \; F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)dt.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie et positive. $f(x,t) = \sin^x(t) = \exp(x \ln(\sin t))$ est bien définie sur $\mathbb{R}\times]0, \pi/2]$ car $\sin > 0$ sur $]0, \pi/2]$ et continue comme composée de fonctions continues. Donc f est intégrable en t sur tout segment de $]0, \pi/2]$. De plus, $\ln \sin t = \ln(t + o(t)) = \ln t + \ln(1 + o(1)) = \ln t + o(1)$, donc $\sin^x(t) = t^x \exp(o(1)) \sim_{t\to 0} t^x$, qui est intégrable en 0 car $x > -1$ (intégrale de Riemann en 0, d'exposant < 1), donc $\int_0 f(x,t)dt$ converge et F est bien définie.

2. Montrer que F est continue en x. Pour $x \geq 0$, $\sin^x t \leq g(t) = 1$, $\sin^x t$ est continue en (x,t) sur $[0,\infty]\times[0,\pi/2]$ donc F est continue par le théorème de continuité pour les intégrales ordinaires. De plus puisque $\sin t \sim_0 t$, il existe $\tau > 0$, telle que $t/2 \leq \sin t$ pour $0 \leq t \leq \tau$, donc pour $x \in [a,0]$ avec $a > -1$, $0 \leq \sin^x t \leq (t/2)^x \leq (t/2)^a$ pour $0 \leq t \leq \tau$. L'application $g(t) = t^a$ est intégrable sur $[0,\tau]$ car $a > -1$, donc $x \mapsto \int_0^\tau \sin^x(t)dt$ est continue pour $x \in [a,0]$ donc sur $]-1,0]$. De plus $x \mapsto \int_\tau^{\pi/2} \sin^x(t)dt$ est continue par le théorème de continuité pour les intégrales ordinaires. Au total, F est continue sur $]-1,\infty]$.

3. Montrer que F est dérivable. La fonction est-elle monotone ? On a $\partial_x \sin^x t = (\ln \sin t)\sin^x t$. Cette fonction est continue pour $(x,t) \in]-1,\infty)\times]0,\pi/2]$, donc $x \mapsto \int_\tau^{\pi/2} \sin^x t dt$ (τ est donné par la question précédente) est dérivable par le théorème de dérivabilité pour les intégrales ordinaires. Par ailleurs, comme dans la question précédente, $|\partial_x \sin^x t| \leq |\ln \sin t| t^a$ si $x \in [a,0]$ et $|\partial_x \sin^x t| \leq |\ln \sin t|)$ si $x \geq 0$, pour $t \in]0,\tau]$. Puisque $|\ln \sin t| \sim_{t\to 0} -\ln t$ qui est intégrable, tout comme $-(\ln t)t^a$ qui est une intégrale de Bertrand convergente car $a > -1$, le théorème de dérivabilité des intégrales généralisées à paramètre montre que $x \mapsto \int_0^\tau \sin^x t dt$, donc F, est dérivable sur $[a,\infty)$, donc sur $]-1,\infty)$, avec $F'(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln \sin t)\sin^x t dt$. Puisque $\sin t \in [0,1]$, l'intégrand est négatif, donc $F' < 0$ et F décroît.

4. Trouver une relation entre $F(x+2)$ et $F(x)$. *Indication* : on effectuera une intégration par partie. On a

$$\begin{aligned} F(x+2) &= \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{x+1} t dt \\ &= [-\cos t \sin^{x+1} t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\big((x+1)\cos t \sin^x t\big)dt \\ &= 0 + (x+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^x t dt \\ &= (x+1)(F(x) - F(x+2)), \end{aligned}$$

soit $(x+2)F(x+2) = (x+1)F(x)$.

5. En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers -1. $F(x) \sim_{x\to -1} \frac{x+2}{x+1} F(2-1) \sim F(1)/(x+1)$, avec $F(1) = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 1$.