Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 5

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. On note $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$ et $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-2y+z=0\ , x-y-z=0\}$.

1. Montrer que P et Q sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, donner leur dimension ainsi qu'une base de P et une base de Q.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus Q$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par
$$f(x,y,z) = (x-y+z, 2y-2x+z, 3z)\ .$$
Montrer que f est linéaire, que $f(u) = 3u$ pour tout $u \in P$ et $f(u) = 0$ pour tout $u \in Q$.
4. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 2.
1. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ est convergente.
2. Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$. En déduire la valeur de J.
3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}dx$ est convergente.
4. Montrer que $I = 2J$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P + (1-X)P'$. On admettra sans vérification que f est linéaire.

1. Déterminer le noyau de f, en donner une base et la dimension (on pourra par exemple commencer par montrer que si $P \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $P'' = 0$).
2. Donner la dimension et une base de l'image de f.

Exercice 4. On définit la fonction f par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. *Préliminaire.* Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ est convergente.
2. On fixe $x \in \mathbb{R}$, et on note pour $t \in]0,1[$, $g_x(t) = \dfrac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}$. Déterminer un équivalent de $g_x(t)$ quand $t \to 0^+$ puis quand $t \to 1^-$.

3. Déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble des x pour lesquels l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente.
4. Calculer $f(0)$.
5. Calculer $f(1)$.
6. Montrer que f est décroissante et positive sur $]-1, +\infty[$.
7. Montrer que pour tout $x > -1$, $f(x) \geq \frac{1}{x+1}$.
8. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to (-1)^+$.