Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 5

Exercice 1. *On note* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$ *et* $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-2y+z=0\ , x-y-z=0\}$.

1. *Montrer que* P *et* Q *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$*, donner leur dimension ainsi qu'une base de* P *et une base de* Q.

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On voit que $(x,y,z) \in P$ si, et seulement si, $z = 2x+y$, autrement dit les élements de P sont tous les vecteurs de la forme $(x,y,2x+y) = x(1,0,2)+y(0,1,2)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient ainsi que $P = \mathrm{Vect}((1,0,2);(0,1,2))$, ce qui montre à la fois que P est un sous-espace vectoriel et que P est engendré par les vecteurs $(1,0,2)$ et $(0,1,2)$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de P, qui est par conséquent de dimension 2.

   De même, on voit que $(x,y,z) \in Q$ si, et seulement si, $z = x-y$ et $z = 2(y-x)$, ce qui est équivalent à $z=0$ et $x=y$. Autrement dit, Q est constitué de tous les vecteurs de la forme $(x,x,0)$, pour $x \in \mathbb{R}$; ainsi, $Q = \mathrm{Vect}(1,1,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1, dont une base est $(1,1,0)$.

2. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = P \oplus Q$.

   Comme $\dim(P)+\dim(Q) = 2+1 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il nous suffit de vérifier que $P \cap Q = \{0\}$; pour cela, considérons un vecteur $u = (x,y,z) \in P \cap Q$. On a alors $x=y, z=0$ $(u \in Q)$ et $z = 2x+y$ $(u \in P)$, ce dont on déduit $x=y=z=0$; par conséquent $P \cap Q = \{0\}$ et on a comme attendu $P \oplus Q = \mathbb{R}^3$.

3. *On considère l'application* $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$f(x,y,z) = (x-y+z, 2y-2x+z, 3z)\ .$$

   Montrer que f *est linéaire, que* $f(u) = 3u$ *pour tout* $u \in P$ *et* $f(u) = 0$ *pour tout* $u \in Q$.

   Pour vérifier que f est linéaire, on considère deux vecteurs $u = (x,y,z)$, $u' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$, et on calcule :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' - \lambda y - y' + \lambda z + z', 2\lambda y + 2y' - 2\lambda x - 2x' + \lambda z + z', 3\lambda z + 3z') \\ &= \lambda(x-y+z, 2y-2x+z, 3z) + (x'-y'+z', 2y'-2x'+z', 3z') \\ &= \lambda f(u) + f(v)\ . \end{aligned}$$

   Ceci montre que f est linéaire.

   Pour montrer que $f(u) = 3u$ pour tout $u \in P$, il suffirait de le vérifier (par linéarité) sur les vecteurs de la base de P obtenue plus haut ; mais on peut aussi directement utiliser que, si $(x,y,z) \in P$ alors $z = 2x+y$ pour obtenir qu'alors

$$f(x,y,z) = (x-y+2x+y, 2y-2x+2x+y, 3z) = (3x,3y,3z) = 3(x,y,z)\ .$$

   De même, si $(x,y,z) \in Q$ alors on a $x=y$ et $z=0$, et donc

$$f(x,y,z) = (x-x+0, 2x-2x+0, 3\cdot 0) = (0,0,0)\ .$$

4. *Déterminer le noyau et l'image de f.*

On a obtenu à la question précédente que $Q \subseteq \ker(f)$. Et, si $u \in P$, alors $f(u) = 3u$, donc $u = f\left(\frac{u}{3}\right) \in \mathrm{Im}(f)$, par conséquent $P \subseteq \mathrm{Im}(f)$. De ces deux faits, on déduit que $\dim(\ker(f)) \geq 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$; comme le théorème du rang nous garantit que $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, ceci n'est possible que si $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Puisque deux espaces vectoriels inclus l'un dans l'autre et de même dimension sont égaux, on a par conséquent $Q = \ker(f)$ et $P = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2. 1. *Montrer que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$ est convergente.*

Notons $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, définie sur $]0, +\infty[$. Il s'agit d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$, positive (ce qui va nous permettre d'utiliser sans crainte des équivalents ci-dessous), et l'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$. En 0^+ on a $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, et le critère de Riemann nous permet de conclure que $\int_0^1 f(x)dx$ converge. En $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$, et c'est à nouveau le critère de Riemann qui nous permet de conclure que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge. On obtient donc bien que $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$ est convergente.

2. *Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer la valeur de $\int_a^b \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$. En déduire la valeur de J.*

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1, et $x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ est continue sur $[a, b]$. On peut donc appliquer le théorème de changement de variable, pour obtenir

$$\int_a^b \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{(1+u^2)u} 2udu = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{2}{1+u^2} du = 2(\arctan(\sqrt{b}) - \arctan(\sqrt{a})) \ .$$

En faisant tendre b vers $+\infty$ et a vers 0, on obtient ainsi

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2(\frac{\pi}{2} - 0) = \pi \ .$$

3. *Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx$ est convergente.*

Appelons cette fois g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}$. Cette fonction est continue et à valeurs positives. Comme en 0 on a $\ln(1+x) \sim x$, on voit que en 0 $g(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc le critère de Riemann ainsi que le théorème de comparaison nous permettent d'affirmer que $\int_0^1 g(x)dx$ converge. En $+\infty$, on doit faire un peu plus attention (notons dès à présent que le raisonnement de la question suivante nous donnera une autre démonstration de la convergence de I) ; on peut par exemple utiliser le fait que $\ln(1+x) \leq x^{1/4}$ pour x suffisamment grand (par croissances comparées), pour obtenir qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [M, +\infty[$ on ait $0 \leq g(x) \leq \frac{x^{1/4}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}$. Comme $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{5/4}} dx$ converge (encore et toujours par le critère de Riemann), on conclut que $\int_M^{+\infty} g(x)dx$ converge. Finalement, on a bien démontré que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx$ est convergente.

4. *Montrer que $I = 2J$.*

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. En utilisant la formule d'intégration par parties sur $[a, b]$ (toutes les fonctions concernées étant C^∞ sur ce segment), on obtient

$$\int_a^b \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx = \left[-2\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx \ .$$

Comme $\ln(1+a) \sim a$ en 0, et $\dfrac{\ln(1+b)}{\sqrt{b}}$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$ (par croissances comparées), on obtient en faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$ que $I = 2J$.

Exercice 3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P + (1-X)P'$. On admettra sans vérification que f est linéaire.*

1. *Déterminer le noyau de f, en donner une base et la dimension (on pourra par exemple commencer par montrer que si $P \in Ker(f)$ alors $P'' = 0$).*
   Soit P un élément du noyau de f. On a alors, par définition, $P+(1-X)P' = 0$, autrement dit $P = (X-1)P'$. En dérivant cette égalité, on obtient $P' = P' + (X-1)P''$, c'est-à-dire $(X-1)P'' = 0$, par conséquent $P'' = 0$. On sait donc que P est nécessairement de degré au plus 1. Alors P' est constant, et on obtient $P = \lambda(X-1)$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, on a $f(X-1) = X-1+(1-X) = 0$, donc $X-1 \in \ker(f)$. On vient d'établir que le noyau de f est constitué de tous les polynômes de la forme $\lambda(X-1)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$: c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1, de base $X-1$.
2. *Donner la dimension et une base de l'image de f.*
   Le théorème du rang nous permet d'obtenir que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(f)) = n$. De plus, on sait que l'image d'une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ est une famille génératrice de $f(\mathbb{R}_n[X])$, et que $f(1) = f(X)$ (puisque $f(X-1) = f(X) - f(1) = 0$). Par conséquent, la famille $(f(X), f(X^2), \dots, f(X^n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, de cardinal égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$: cette famille forme une base de $\mathrm{Im}(f)$. Un calcul explicite donne, pour tout $k \geq 1$, que $f(X^k) = X^k + (1-X)kX^{k-1} = kX^{k-1} - (k-1)X^k$. Finalement, la famille formée par tous les polynômes de la forme $kX^{k-1} - (k-1)X^k$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, est donc une base de l'image de f.

Exercice 4. *On définit la fonction f par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}dt$.*

1. Préliminaire. *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ est convergente.*
   On est face à l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1[$, à valeurs positives. L'intégrale est généralisée en 1 ; on pourrait utiliser le critère de Riemann, ou simplement remarquer que, pour tout $a \in [0,1[$, on a
   $$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_0^a = 2 - 2\sqrt{1-a}\ .$$
   Ainsi, la limite de $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ quand a tend vers 1^- existe et vaut 2, ce qui montre à la fois que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ est convergente et qu'elle vaut 2.
2. *On fixe $x \in \mathbb{R}$, et on note pour $t \in]0,1[$, $g_x(t) = \dfrac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}$. Déterminer un équivalent de $g_x(t)$ quand $t \to 0^+$ puis quand $t \to 1^-$.*
   En 0^+, on a $\sqrt{1-t^2} \sim 1$, donc $g_x(t) \sim t^x$; en 1^-, t^x tend vers 1 et $1-t^2 = (1-t)(1+t) \sim 2(1-t)$ donc $g_x(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$.
3. *Déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble des x pour lesquels l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente.*
   La fonction g_x est continue et à valeurs positives sur $]0,1[$; on peut donc lui appliquer le critère des équivalents. L'équivalent obtenu ci-dessus, allié au critère de Riemann, montre que l'intégrale de g_x converge en 0 si, et seulement si, $x > -1$. En 1^-, on obtient que l'intégrale converge pour tout x grâce à l'équivalent obtenu

ci-dessus et au résultat de la question préliminaire. Finalement, on obtient que le domaine de définition de f est $]-1,+\infty[$.

4. *Calculer $f(0)$.*

   Si $x = 0$, on a $t^x = 1$ pour tout $t \in [0,1]$. On doit donc calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, ce qu'on peut faire par exemple à l'aide du changement de variable (de classe C^1) $t = \sin(u)$, pour obtenir

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} \cos(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2} .$$

   On peut aussi reconnaître en $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ la dérivée de arcsin, et donc écrire

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[\arcsin t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} .$$

5. *Calculer $f(1)$.*

   On a

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[-\sqrt{1-t^2}\Big]_0^1 = 1 .$$

6. *Montrer que f est décroissante et positive sur* $]-1,+\infty[$.

   Pour tout $t \in]0,1[$, et tous réels x, x' tels que $-1 < x \leq x'$, on a $t^x \geq t^{x'}$, donc aussi $\frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \geq \frac{t^{x'}}{\sqrt{1-t^2}}$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $f(x) \geq f(x')$ dès que $x \leq x'$, et on vient de montrer que f est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

7. *Montrer que pour tout $x > -1$, $f(x) \geq \frac{1}{x+1}$.*

   Soit $x \in]-1,+\infty[$. Pour tout $t \in]0,1[$ on a $0 < \sqrt{1-t^2} < 1$, ce dont on déduit que $\frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \geq t^x$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $f(x) \geq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

8. *En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to (-1)^+$.*

   Comme $\frac{1}{x+1}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $(-1)^+$, on déduit immédiatement du résultat de la question précédente que f tend vers $+\infty$ en $(-1)^+$.