Partie commune - Correction du devoir n$^{\text{o}}$ 5

Partie analyse

Exercice 1. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si} \quad x \leq y \\ y(1-x) & \text{si} \quad y > x \end{cases}$$

Soit $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$. La fonction f est clairement continue sur les ouverts $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. De plus on a pour $x_0 = y_0$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\ (x,y)\in\mathcal{D}_1} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)\ (x,y)\in\mathcal{D}_2} f(x,y) = f(x_0,y_0) = x_0(1-y_0),$$

donc f est continue sur la droite d'équation $x = y$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Etudier la limite en $(0,0)$ des trois fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x^2\ln(x^2+1)}{x^2+y^2+1}, \qquad g(x,y) = \frac{[\ln(|xy|+1)]^2}{x^2+y^2}, \qquad h(x,y) = \frac{\ln(|x-y|+1)+1}{x^2+y^2}.$$

La fonction f est clairement une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, on a alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

On a pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{[\ln(|xy|+1)]^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq y^2,$$

ceci car $\ln(t+1) \leq t$, pour tout $t > -1$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

Enfin pour la fonction h, la limite n'est pas une forme indéterminée et on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = +\infty.$$

Exercice 3. Notons par $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_∞ : $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Montrer que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ définie par pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et tout $x \in [0,1]$ par

$$[\Phi(f)](x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme continue de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme N_∞.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\Phi(f)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue. Donc $\Phi(f) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. De plus on a pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\Phi(f+\lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g).$$

Donc Φ est bien un endomorphisme.

De plus pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$N_\infty(\Phi(f)) = \sup_{x\in[0,1]} |\int_0^x f(t)dt| \leq N_\infty(f),$$

donc Φ est continue.

Partie algèbre

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Soient $\pi_1, \dots, \pi_n$ des endomorphismes de E tels que pour tous $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$, $\pi_i \neq 0$, $\pi_i^2 = \pi_i$ et $\pi_i \circ \pi_j = 0$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $E_i = \mathrm{Im}(\pi_i)$.

1. Montrer que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Que peut-on dire de chaque $\dim(E_i)$?

   Montrons pour commencer que la somme des E_i est directe. Soit donc $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Par définition de chaque E_i, il existe $z_i \in E$ tel que $\pi_i(z_i) = x_i$.

   Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_{i_0}(x_1 + \cdots + x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_{i_0}(\pi_i(z_i)) \\ &= \pi_{i_0}(\pi_{i_0}(z_{i_0})) \text{ (car } \forall i \neq i_0,\ \pi_{i_0} \circ \pi_i = 0) \\ &= \pi_{i_0}(z_{i_0}) \text{ (car } \pi_{i_0} \circ \pi_{i_0} = \pi_{i_0}) \\ &= x_{i_0}. \end{aligned}$$

   Ainsi, la somme des E_i est une somme directe. Par conséquent :

$$\dim(E_1 + \cdots + E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

   De plus, chaque π_i est non nul donc pour tout i, $\dim(E_i) \geq 1$, d'où $\dim(E_1 + \cdots + E_n) \geq n$. Mais cet espace est un sous-espace vectoriel de E et ce dernier est de dimension n donc : $\dim(E_1 + \cdots + E_n) = \dim(E)$. On peut alors conclure que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

   En ce qui concerne $\dim(E_i)$, nous avons déjà vu que $\dim(E_i) \geq 1$ pour tout i. Si pour l'un des i nous avions $\dim(E_i) > 1$ alors nous aurions $\sum \dim(E_i) > n$ ce qui montre que pour tout i, $\dim(E_i) = 1$.

2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $D = a_1\pi_1 + \cdots + a_n\pi_n$.

   Montrer que D est diagonalisable et donner son ensemble de valeurs propres.

   Pour tout i entre 1 et n, soit b_i un vecteur non nul de E_i (ce qui est possible car $E_i \neq \{0\}$). La somme directe précédente implique que les b_i forment une famille libre et donc une base de E. Montrons que, pour tout i, b_i est un vecteur propre de D avec pour valeur propre a_i.

Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Par définition de b_{i_0} et E_{i_0}, il existe $v \in E$ tel que $b_{i_0} = \pi_{i_0}(v)$. On a :

$$\begin{aligned} D(b_{i_0}) &= (\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i)(\pi_{i_0}(v)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(\pi_{i_0}(v)) \\ &= a_{i_0} \pi_{i_0}(\pi_{i_0}(v)) \\ &= a_{i_0} \pi_{i_0}(v) \\ &= a_{i_0} b_{i_0}. \end{aligned}$$

En conclusion, les b_i forment une base de vecteurs propres de D qui est donc diagonalisable et les a_i sont les valeurs propres de D.

Exercice 5. Considérons la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, sans calculs, un scalaire α tel que $\text{rang}(A - \alpha \text{Id}_n) < n$.

   On remarque que $A - n\text{Id}_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont 1. Toutes ses colonnes sont donc égales donc $\text{rang}(A - \alpha \text{Id}_n) = 1 < n$.

2. En utilisant la trace de A, en déterminer toutes ses valeurs propres.

   Par ce qui précède et en utilisant le téorème du rang, on peut dire que n est une valeur propres de A et sa multiplicité est supérieure ou égale à $n - 1$. On sait que la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Ainsi A admet comme "autre" valeur propre (qui peut a priori être n) : $\text{tr}(A) - (n-1)n$, c'est-à-dire $n(n+1) - n(n-1) = 2n$. Ainsi A a pour spectre $\{n, 2n\}$.

3. Déterminer le polynôme minimal de A.

   Par ce qui précède, $\dim(E_n) = n - 1$ et $\dim(E_{2n}) \geq 1$. Ainsi $\dim(E_n \oplus E_{2n}) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ ce qui signifie que A est diagonalisable. On en déduit que le polynôme minimal est scindé à racines simples et donc $m_A = (X - n)(X - 2n)$.

4. Déterminer $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P soit inversible et D diagonale et $P^{-1}AP = D$.

   On cherche une base de E_n et une base de E_{2n}.
   Dans la matrice $A - n\text{Id}_n$, on a les relations suivantes entre les colonnes C_i : $C_1 - C_2 = 0$, $C_1 - C_3 = 0$, $\dots$, $C_1 - C_n = 0$, d'où les vecteurs suivants dans E_n : $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3$, $\dots$, $e_1 - e_n$, où l'on a noté e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ces vecteurs sont clairement libres dans E_n. Ils en forment donc une base.
   Dans $A - 2n\text{Id}_n$, on remarque que la somme des colonnes est nulle, donc le vecteur $b = (1, \dots, 1)$ appartient à E_{2n}. Ce dernier étant de dimension 1, on en obtient la base $\{b\}$.

Soient alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2n \end{pmatrix}.$$

Par ce qui précède, $P^{-1}AP = D$.

5. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, déterminer les matrices associées aux projecteurs spectraux de l'endomorphisme dont A est la matrice.

Notons Π_n et Π_{2n} les matrices demandées.
On cherche une relation de Bézout entre $X - n$ et $X - 2n$ (connaissant le polynôme minimal de A). On a : $(X - n) - (X - 2n) = n$ d'où la relation suivante

$$1 = \frac{1}{n}(X - n) + \frac{-1}{n}(X - 2n),$$

d'où

$$\Pi_n = \frac{-1}{n}(A - 2n\mathrm{Id}_n) \text{ et } \Pi_{2n} = \frac{1}{n}(A - n\mathrm{Id}_n).$$

6. En déduire, pour chaque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'existence et l'unicité d'un polynôme Q_k de la forme suivante $Q_k = X^k + c_k X + d_k$, avec $c_k, d_k \in \mathbb{R}$, qui annule A. On donnera c_k et d_k.

Soit donc $k \geq 2$ un entier.
Commençons par l'existence. La matrice A est diagonalisable et $A = n\Pi_n + 2n\Pi_{2n}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} A^k &= n^k\Pi_n + (2n)^k\Pi_{2n} \\ &= n^k \cdot \frac{-1}{n}(A - 2n\mathrm{Id}_n) + (2n)^k \cdot \frac{1}{n}(A - n\mathrm{Id}_n) \\ &= -n^{k-1}A + 2n^k\mathrm{Id}_n + 2^k n^{k-1}A - 2^k n^k\mathrm{Id}_n \\ &= (2^k - 1)n^{k-1}A + (2 - 2^k)n^k\mathrm{Id}_n \\ &= -(1 - 2^k)n^{k-1}A - (2^k - 2)n^k\mathrm{Id}_n \end{aligned}$$

Ainsi A est racine du polynôme

$$X^k + (1 - 2^k)n^{k-1}X + (2^k - 2)n^k,$$

ce qui donne l'existence du polynôme demandé avec $c_k = (1 - 2^k)n^{k-1}$ et $d_k = (2^k - 2)n^k$.

Montrons l'unicité. Soient $Q = X^k + cX + d$ et $R = X^k + c'X + d'$ (avec $c, d, c', d' \in \mathbb{R}$) deux polynômes de la forme voulue et annulant A. Considérons le polynôme $Q - R = (c - c')X + (d - d')$. Ce polynôme est annulateur de A et son degré est au plus 1. Or m_A est de degré 2 donc si $Q - R$ est non nul, cela contredit la définition de m_A. Ainsi $Q - R$ est nul, i.e. $Q = R$ et l'unicité est démontrée.

7. (Question bonus) À l'aide du polynôme minimal de A mais sans utiliser les projecteurs spectraux, donner une autre démonstration du résultat de la question 6 (y compris la détermination de c_k et d_k).

Pour l'unicité, on utilise le même argument. Montrons comment obtenir l'existence sans utiliser les projecteurs spectraux.
Soit $k \geq 2$ un entier. Considérons le polynôme suivant (qui est de degré k) :

$$\begin{aligned} S &= X^{k-2} \cdot m_A \\ &= X^{k-2}(X-n)(X-2n) \\ &= X^{k-2}(X^2 - 3nX + 2n^2) \\ &= X^k - 3nX^{k-1} + 2n^2 X^{k-2} \end{aligned}$$

Notons $T = -3nX^{k-1} + 2n^2X^{k-2}$ de sorte que $S = X^k + T$. Pour obtenir le polynôme recherché, on considère la division euclidienne de T par m_A :

$$(*) \quad T = U \cdot (X-n)(X-2n) + R.$$

Par définition de la division euclidienne, R est de degré au plus 1. Il est donc de la forme $R = cX + d$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.
On évalue $(*)$ en $X = n$ et en $X = 2n$ et on obtient les équations suivantes :

$$-3n \cdot n^{k-1} + 2n^2 \cdot n^{k-2} = c \cdot n + d \qquad \text{et} \qquad -3n \cdot (2n)^{k-1} + 2n^2 \cdot (2n)^{k-2} = c \cdot 2n + d.$$

Après un rapide calcul, on obtient

$$c \cdot n + d = -n^k \qquad \text{et} \qquad c \cdot 2n + d = -2^k n^k$$

En soustrayant la deuxième égalité de la première, on obtient $cn = (1-2^k)n^k$ puis $c = (1-2^k)n^{k-1}$. Puis, en utilisant ce résultat, on obtient $d = -n^k - cn = (2^k - 2)n^k$.
Maintenant, posons : $Q = X^k + c \cdot X + d$.
Ce polynôme a la forme voulue. Il reste à montrer que c'est bien un annulateur de A. Or

$$\begin{aligned} Q &= X^k + R \\ &= X^k + T - U \cdot m_A \\ &= S - U \cdot m_A \\ &= X^{k-2} \cdot m_A - U \cdot m_A \\ &= (X^{k-2} - U) \cdot m_A, \end{aligned}$$

donc Q est multiple de m_A. Il est donc annulateur de m_A ce qui achève la démonstration de l'existence.