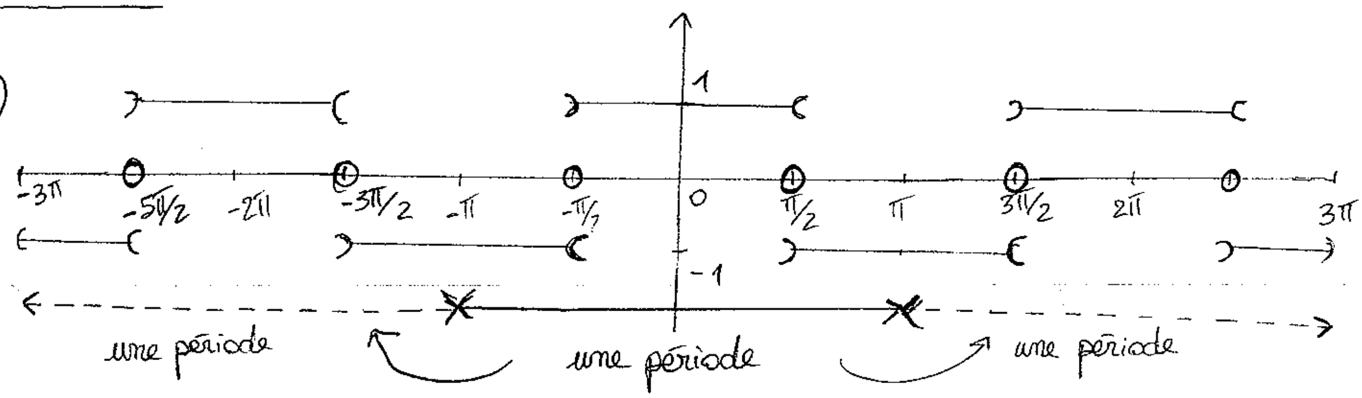
Exercice 3 :

1)



2) * f est 2π-périodique

* f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$:

en effet, f est $\mathcal{C}^0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

f est paire et 2π-périodique

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = -1 = \lim\limits_{x\to(-\pi)^+} f(x)$

Comme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -1$,

on en déduit que les points de discontinuités de f se trouvent en $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Par conséquent, f est $\mathcal{C}^0$ et constante sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble

* D'après le Théorème de Dirichlet,

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)$$

Sur $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, f est continue donc $\forall t\in E$, $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$

et $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right)+f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \forall t\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$.

<u>Conclusion :</u> $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)$.

3) Comme f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{car } t\mapsto f(t)\cos(nt) \text{ est paire}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p,\ p\in\mathbb{N}^* \\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{(-1)^p}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1,\ p\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{et } a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \underset{\text{par parité de } f}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}dt - \int_{\pi/2}^{\pi}dt\right] = 0$$

<u>Conclusion:</u> $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n(f)\cos(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos((2p+1)t)$.

4) * En remplaçant t par 0, on obtient : $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$

* Comme f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la formule de Parseval : $\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$

d'où $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2p+1}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt \iff \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

* En séparant les termes pairs et impairs, et puisque les séries sont à termes dans $\mathbb{R}_+$ et convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} \iff \left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$