Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2016-2017
Cursus prépa-première année

Fondamentaux des mathématiques I-DS4

Partie commune (1h30)

– L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
– Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.
– L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil (téléphone portable, grille-pain,...) est prohibé.

Barème

Question de cours 4 points+3 points

Exercice 1 : 1 point+2 points+2 points+3 points+3 points

Exercice 2 : 1 point+2 points+4 points

Exercice 3 : 2 points+1 point+5 points

Exercice 4 : 2 points+2 points+4 points

Question de cours

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$ et a un élément de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. L'élément a est racine au moins double (deuxième) de P si et seulement si a est racine de P et de P'.
2. Soient a et b deux entiers. Montrer que c est un diviseur de a et b si et seulement si c divise $d = pgcd(a, b)$

Correction

1. Supposons a racine au moins double de P et posons $P = (X - a)^2 Q$, on a alors

$P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q'$, il est clair que a est au moins racine de P'.

Réciproquement,

Supposons que a soit racine de P et P'. Comme a est racine de P on peut écrire $P = (X - a)Q_1$, donc $P' = Q_1 + (X - a)Q_1'$. On applique a a cette relation on en déduit que $Q_1(a) = 0$, donc Q_1 admet lui-même $(X - a)$ en facteur, on peut alors écrire $Q_1 = (X - a)Q$ et $P = (X - a)^2 Q$.

2. Si c divise d, il existe k entier tel que $d = kc$, comme d divise a, il existe l entier tel que $a = ld$, par conséquent $a = klc$, d'où c divise a, de même c divise b.
   Si c divise a et c divise b, il existe k et l deux entiers tels que $a = kc$ et $b = lc$. D'après Bézout, il existe u et v deux entiers tels que
   $$au + bv = d$$
   Ce qui s'écrit aussi
   $$c(ku + lv) = d$$
   Donc c divise d.

Exercice 1.

1. Calculer le $pgcd$ de 225 et de 123.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $225u + 123v = pgcd(225,123)$.
3. En déduire une solution particulière de $75x + 41y = 20$

4. Déterminer l'ensemble des solutions pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de $75x + 41y = 20$
5. Donner l'ensemble des solutions pour $n \in \mathbb{Z}$ du système

$$\begin{cases} n \equiv 13 \ [41] \\ n \equiv 33 \ [75] \end{cases}$$

Correction exercice 1.

1. Première méthode

$$225 = 3^2 \times 5^2 \quad \text{et} \quad 123 = 3 \times 41$$

Donc le pgcd de 225 et de 123 est 3

Deuxième méthode, avec l'algorithme d'Euclide

$$225 = 1 \times 123 + 102$$
$$123 = 1 \times 102 + 21$$
$$102 = 4 \times 21 + 18$$
$$21 = 1 \times 18 + 3$$
$$18 = 6 \times 3 + 0$$

Le *pgcd* recherché est le dernier reste non nul, donc 3.

2. Pour trouver une solution de cette équation, nous allons utiliser les égalités ci-dessus

$$\begin{aligned} 3 = 21 - 1 \times 18 = 21 - 1 \times (102 - 4 \times 21) &= -1 \times 102 + 5 \times 21 \\ = -1 \times 102 + 5(123 - 1 \times 102) &= 5 \times 123 - 6 \times 102 \\ = 5 \times 123 - 6(225 - 1 \times 123) &= -6 \times 225 + 11 \times 123 \end{aligned}$$

Donc $(u, v) = (-6, 11)$ convient.

3. Multiplions l'égalité ci-dessus par 20.

$$-120 \times 225 + 220 \times 123 = 60$$

puis divisons la par 3

$$-120 \times 75 + 220 \times 41 = 20 \quad L_1$$

4.

$$75x + 41y = 20 \quad L_2$$

$L_2 - L_1$ donne $75(x + 120) + 41(y - 220) = 0$, ce qui équivaut à

$$75(x + 120) = 41(220 - y)$$

D'après le théorème de Gauss, comme 75 et 41 sont premiers entre eux

75 divise $220 - y$, par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $220 - y = 75k$, soit aussi $y = 220 - 75k$

On remplace $220 - y = 75k$ dans

$$75(x + 120) = 41(220 - y)$$

Ce qui donne

$$75(x + 120) = 41 \times 75k$$

Puis on simplifie par 75, pour obtenir $x + 120 = 41k$, soit aussi $x = -120 + 41k$

Ensuite on fait la réciproque. L'ensemble de solutions est

$$(x, y) = (-120 + 41k, 220 - 75k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

5.

$$\begin{cases} n \equiv 13 \ [41] \\ n \equiv 33 \ [75] \end{cases} \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z}, \begin{cases} n = 13 + 41u \\ n = 33 + 75v \end{cases}$$

Ce qui entraine que $13 + 41u = 33 + 75v \Leftrightarrow -75v + 41u = 20$

D'après la question 3. il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} -v = -120 + 41k \\ \ \ u = 220 - 75k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 120 - 41k \\ u = 220 - 75k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 120 - 41k \\ u = 220 - 75k \end{cases}$$

En remplaçant dans $\begin{cases} n = 13 + 41u \\ n = 33 + 75v \end{cases}$

$$\begin{cases} n = 13 + 41(220 - 75k) \\ n = 33 + 75(120 - 41k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 + 41(225 - 5 - 75k) \\ n = 33 + 75(123 - 3 - 41k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 + 41\big(-5 - 75(k-3)\big) \\ n = 33 + 75\big(-3 - 41(k-3)\big) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 + 41(-5) \ \ [41 \times 75] \\ n = 33 + 75(-3) \ \ [41 \times 75] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 - 205 \ \ [41 \times 75] \\ n = 33 - 225 \ \ [41 \times 75] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = -192 \ \ [41 \times 75] \\ n = -192 \ \ [41 \times 75] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv -192 \ \ [41 \times 75] \Leftrightarrow n \equiv 2883 \ \ [3075]$$

Exercice 2. Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que P admet deux racines réelles évidentes.
2. Montrer que j est une racine double de $P(X)$.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ (en faisant attention au degré de P), puis dans $\mathbb{R}[X]$

Correction exercice 2.

1. 0 et -1 sont des racines évidentes.
2. $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j - 1 = (-1)^7 J^{14} - j - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$
$$P'(X) = 7(X+1)^6 - 7X^6 \Rightarrow P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6 = 7(-j^2)^6 - 7 = 7j^{12} - 7 = 0$$
Donc j est racine au moins double de P.
3. P est à coefficients réels, donc $j^2 = \bar{j}$ est aussi racine double.
En comptant la multiplicité des racines, cela fait 6 racines. Or
$$P(X) = X^7 + 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X + 1 - X^7 - 1$$
$$= 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X$$
En fait l'essentiel est de se rendre contre que $d°P = 6$ et que son coefficient dominant est 7.
Donc, comme on a trouvé 6 racines
$$P(X) = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2$$
Est la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$. Puis
$$P(X) = 7X(X+1)\big((X-j)(X-j^2)\big)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$
Est la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$.
Car $(X-j)(X-j^2) = X^2 - jX - j^2X + j^3 = X^2 + (-j-j^2)X + 1 = X^2 + X + 1$

Exercice 3. Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$

On pose $Y = X + \frac{1}{X}$

1. Montrer que le polynôme $Q(Y) = 2Y^2 + 3Y - 5$, vérifie $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de Q.
3. En déduire les racines de P, puis la factorisatistion de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction exercice 3.

1.
$$\frac{P(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$
Et
$$Q(Y) = 2\left(X + \frac{1}{X}\right)^2 + 3\left(X + \frac{1}{X}\right) - 5 = 2\left(X^2 + 2 + \frac{1}{X^2}\right) + 3X + \frac{3}{X} - 5 = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$
$$= \frac{P(X)}{X^2}$$

2. Les racines de Q sont 1 et $-\frac{5}{2}$
3. Donc les racines de P vérifient

$$\begin{cases} X+\dfrac{1}{X}=1 \\ X+\dfrac{1}{X}=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+1=X \\ \text{ou} \\ X^2+1=-\dfrac{5}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2-X+1=0 \\ \text{ou} \\ X^2+\dfrac{5}{2}X+1=0 \end{cases}$$

Les racines de $X^2-X+1=0$ sont

$$-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et celles de $X^2+\frac{5}{2}X+1=0$ sont

$$-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -2$$

On en déduit la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X)=2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X+2)(X^2-X+1)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X)=2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X+2)(X+j)(X+j^2)$$

Exercice 4.

1. Donner, en le justifiant, le nombre de diviseurs positifs de 100^{100}.
2. Déterminer le reste de la division de 101^{101} par 3, et par 5.
3. En déduire le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 15.

Correction exercice 4.

1.
$$100^{100}=(2^2\times 5^2)^{100}=2^{200}\times 5^{200}$$
Les diviseurs positifs de 1000000 sont de la forme 2^k5^l avec $k\in\{0,1,\dots,200\}$ et $l\in\{0,1,\dots,200\}$, il y a donc $201\times 201=(200+1)^2=4000+400+1=40401$ diviseurs positifs.
2. $101=3\times 33+2$ donc $101\equiv 2\ [3]$
$$101^{101}\equiv 2^{101}\ [3]\equiv(-1)^{101}\ [3]\equiv -1\ [3]\equiv 2\ [3]$$
$0\le 2<3$, donc le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 3 est 2.
$101=4\times 25+1$ donc $101\equiv 1\ [5]$
$$101^{101}\equiv 1^{101}\ [5]\equiv 1\ [5]$$
$0\le 1<5$, donc le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 5 est 1.
3. On pose $N=101^{101}$, $N\equiv 2\ [3]$ et $N\equiv 1\ [5]$ donc il existe $k,l\in\mathbb{Z}$ tels que $N=2+3k$ et $N=1+5l$
On trouve alors que
$$2+3k=1+5l\Leftrightarrow 1=5l-3k$$
Dont une solution particulière est $1=5(-1)-3(-2)$
En faisant la différence on trouve que
$$0=5(l+1)-3(k+2)\Leftrightarrow 5(l+1)=3(k+2)$$
Comme 5 divise $3(k+2)$ et que 5 est premier avec 3, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 5 divise $k+2$, il existe donc $u\in\mathbb{Z}$ tels que $k+2=5u\Leftrightarrow k=-2+5u$ (on peut chercher les valeurs que prend l mais cela ne sert à rien ici), ce que l'on remplace dans

$$N = 2 + 3k = 2 + 3(-2 + 5u) = -4 + 15u$$

Attention -4 n'est pas le reste recherché, comme $N \equiv -4\ [15] \equiv 11\ [15]$ le reste de la division de N par 15 est 11 car $0 \leq 11 < 15$.