Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 4 - Correction

Exercice 1. 1. *Calculer les primitives de la fonction rationnelle* $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-2x+5}$. *Préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies.*

Nous sommes confrontés à une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du numérateur ; reste à factoriser le dénominateur, ce qui dans ce cas précis revient à décider s'il est irréductible. Pour cela, on peut écrire $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$, et constater qu'on a affaire à un polynôme de degré 2 sans racine, autrement dit un irréductible de $\mathbb{R}_2[X]$. La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-2x+5}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$; elle y est continue et admet donc des primitives définies sur $\mathbb{R}$.

Pour l'intégrer, on écrit $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+4} + \dfrac{2}{(x-1)^2+4}$; une primitive du premier terme est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln((x-1)^2+4)$, Pour le second, on écrit $\dfrac{2}{4+(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{(x-1)}{2}\right)^2}$ et l'on obtient qu'une primitive est $\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$.

On en déduit que les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln((x-1)^2+4)+\arctan(\dfrac{x-1}{2})+C$, où $C\in\mathbb{R}$.

2. *A l'aide du changement de variable* $x=\tan t$, *calculer l'intégrale suivante :*

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{(1+\tan t)(1+(\tan t)^2)}{(\tan t)^2-2\tan t+5}dt.$$

La fonction $t\mapsto \tan(t)$ réalise une bijection de classe C^∞ de $[0,\frac{\pi}{4}]$ sur $[0,1]$; on peut donc appliquer le théorème de changement de variables pour obtenir (en utilisant $\tan' = 1+\tan^2$)

$$I=\int_0^1\frac{1+x}{x^2-2x+5}dx\ .$$

Le résultat obtenu à la question précédente nous donne donc

$$I=\left[\frac{1}{2}\ln((x-1)^2+4)+\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln(4)-\ln(5))+\arctan(\frac{1}{2})\ .$$

Exercice 2. 1. *On considère* $E_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon x+y-z-t=0 \text{ et } x-z-2t=0\}$.

(a) *Montrer que* E_1 *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et que, pour tout* $u\in\mathbb{R}^4$, *on a*

$$u\in E_1 \Leftrightarrow \exists (x,t)\in\mathbb{R}^2 \quad u=(x,-t,x-2t,t)\ .$$

Il est immédiat que $0\in E_1$. Si $u=(x,y,z,t)\in E_1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda u=(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)$ et on a

$$\lambda x+\lambda y-\lambda z-\lambda t=\lambda(x+y-z-t)=0 \text{ et } \lambda x-\lambda z-2\lambda t=\lambda(x-z-2t)=0\ .$$

Donc $\lambda u\in E_1$. De même, si $u=(x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2,t_2)$ appartiennent à E_1, alors $u+v$ est le vecteur de coordonnées $(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2,t_1+t_2)$ et on a bien

$$x_1+x_2+y_1+y_2-z_1-z_2-t_1-t_2=0+0=0 \text{ et } x_1+x_2-z_1-z_2-2t_1-2t_2=0+0=0\ .$$

Par conséquent, $u+v \in E_1$ et on a fini de vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Soit maintenant $u = (x, y, z, t) \in E_1$. C'est équivalent à dire que $x + y = z + t$ et $z = x - 2t$, soit encore à $z = x - 2t$ et $y = z + t - x = -t$, donc les éléments de E_1 s'écrivent tous sous la forme $u = (x, -t, x - 2t, t)$, pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$; réciproquement on vérifie qu'un vecteur s'écrivant sous cette forme appartient à E_1.

(b) *Donner une base et la dimension de E_1.*

Le résultat de la question précédente revient à dire que les éléments de E_1 sont les eléments de $\mathbb{R}^4$ qui s'écrivent sous la forme $x(1, 0, 1, 0) + t(0, -1, -2, 1)$, pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$; autrement dit E_1 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, -1, -2, 1)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires et forment donc une famille libre ; ainsi, ils forment à la fois une famille libre et une famille génératrice de E_1, autrement dit une base de E_1. Par conséquent, E_1 est de dimension 2.

2. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 2, 0, a)$, $v_4 = (2, 0, 2, 1)$. On note $E_2 = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$.*

(a) *Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas libre.*

On pourrait essayer de résoudre le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$, mais ici on peut aussi directement remarquer que $v_4 = v_1 + v_2$. Donc la famille (v_1, v_2, v_4) n'est pas libre et, a fortiori, la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas libre.

(b) *Montrer que $2 \leq dim E_2 \leq 3$.*

Comme $v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, on a en fait $E_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, ce qui montre que E_2 est de dimension au plus 3 (il a une famille génératrice à 3 éléments, et la dimension est le plus petit cardinal d'une famille génératrice). De plus, E_2 contient v_1 et v_2, qui forment une famille libre (ils ne sont pas colinéaires). Donc E_2 est de dimension au moins 2 (la dimension est le plus grand cardinal d'une famille libre).

(c) *Donner, selon la valeur du paramètre a, la dimension et une base de E_2.* Si $v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, E_2 est de dimension 2 ; sinon il est de dimension 3. On doit donc déterminer quand v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2, autrement dit quand le système

$$\begin{cases} 0 & = \lambda + \mu \\ 2 & = \lambda - \mu \\ 0 & = \lambda + \mu \\ a & = \lambda \end{cases}$$

a une solution. Les trois premières lignes sont équivalentes à $\lambda = 1$, $\mu = -1$; par conséquent le système a une solution si, et seulement si, $a = 1$. On voit donc que E_2 est de dimension 2 si $a = 1$, et de dimension 3 sinon. Dans le premier cas, (v_1, v_2) est une base de E_2 (famille libre à 2 éléments dans un espace de dimension 2) ; dans le second cas, (v_1, v_2, v_3) est une base de E_2 (famille de trois vecteurs génératrice d'un espace de dimension 3).

Exercice 3. *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$.*

1. *Calculer u_0.*
   On a $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{2} dt = \frac{e-1}{2}$.
2. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on a $t^{n+1} \leq t^n$, ce dont on déduit que $\dfrac{e^t}{1+t^{n+1}} \geq \dfrac{e^t}{1+t^n}$. Par positivité et

linéarité de l'intégrale, on obtient donc que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^{n+1}}dt \geq \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt$, autrement dit $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci étant vrai pour tout n, on vient de montrer que (u_n) est croissante.

3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e-1$.*

   Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque $t^n \geq 0$, on obtient $\dfrac{e^t}{1+t^n} \leq e^t$. En intégrant cette inégalité, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq e-1$.

4. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie, notée ℓ.*

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente.

5. *On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e-1-u_n$.*

   (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 e^t \frac{t^n}{1+t^n}dt$.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $e-1 = \displaystyle\int_0^1 e^t dt$ et donc

$$v_n = \int_0^1 e^t dt - \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 \left(e^t - \frac{e^t}{1+t^n}\right)dt = \int_0^1 e^t \frac{t^n}{1+t^n}dt\ .$$

   (b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive ; par conséquent, la formule obtenue à la question précédente nous permet de conclure que $v_n \geq 0$.

   Soit $t \in [0,1]$. Comme $t^n \geq 0$, on a $e^t \dfrac{t^n}{1+t^n}dt \leq e\dfrac{t^n}{1+0} = et^n$. En intégrant cette inégalité, on obtient donc que $v_n \leq \displaystyle\int_0^1 et^n dt = \frac{e}{n+1}$.

6. *En déduire la valeur de ℓ.*

   Le résultat de la question précédente, allié au théorème des gendarmes, nous montre que (v_n) tend vers 0. Comme la limite de (v_n) vaut $e-1-\ell$, on en déduit $\ell = e-1$.

Exercice 4. *On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, et on considère les trois éléments suivants de $\mathbb{R}_2[X]$:*

$$L_0(X) = (X-1)(X-2)\ ;\ L_1(X) = X(X-2)\ ;\ L_2(X) = X(X-1)\ .$$

1. *Montrer que, pour tout $i, j \in \{0,1,2\}$ on a $L_i(j) = 0$ si $i \neq j$, et $L_i(i) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

   Soit $i \in \{0,1,2\}$. L_i est un polynôme à coefficients entiers, et sa définition sous forme factorisée nous donne que ses racines sont les éléments de $\{0,1,2\} \setminus \{i\}$. Par conséquent, $L_i(j) = 0$ pour $j \in \{0,1,2\} \setminus \{i\}$ et $L_i(i) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2. *Montrer que la famille (L_0, L_1, L_2) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.*

   Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$. En particulier, $\lambda_0 L_0(0) + \lambda_1 L_1(0) + \lambda_2 L_2(0) = 0$, et le résultat de la question précédente nous donne donc que $\lambda_0 L_0(0) = 0$, ainsi $\lambda_0 = 0$ puisque $L_0(0) \neq 0$. De même, en évaluant en 1 et en 2, on obtient $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. Par conséquent, la famille (L_0, L_1, L_2) est libre.

3. *Montrer que tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$Q = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2\ ,$$

   où les α_i sont des réels. Montrer que, pour $i \in \{0,1,2\}$, $\alpha_i L_i(i) = Q(i)$.

   La famille (L_0, L_1, L_2) est une famille libre à trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension

3. Par conséquent, (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, ce qui revient à dire que tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$Q = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 \ ,$$

où les α_i sont des réels. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$ on a $Q(i) = \alpha_0 L_0(i) + \alpha_1 L_1(i) + \alpha_2 L_2(i)$, et $L_j(i) = 0$ sauf pour $j = i$, donc $Q(i) = \alpha_i L_i(i)$.

4. (Bonus) *Soit un polynôme* $P \in \mathbb{R}_2[X]$ *tel que* $P(i) \in \mathbb{Q}$ *pour tout* $i \in \{0, 1, 2\}$*. En utilisant ce qui précède, montrer que* $P \in \mathbb{Q}[X]$.
Ecrivons $P = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$; d'après le résultat précédent, on a $\alpha_i = \dfrac{P(i)}{L(i)}$, et $L(i)$ est un entier relatif non nul. De plus, $P(i) \in \mathbb{Q}$ par hypothèse. Donc $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Comme $P = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$, et les L_i sont à coefficients entiers, on en déduit comme attendu que P est à coefficients rationnels.