Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 4

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. ***Une note bonus (comprise entre 0 et 1) sera attribuée à la qualité de la rédaction.***
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,dx, \qquad B = \int_0^{1/2} \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+3y+2z, 2x+z).$$

Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Indiquer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt, \qquad v_n = \int_1^n e^{-t}(1+t)\,dt.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.
3. Calculer v_n en fonction de n.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et les sous-espaces vectoriels $S = \mathrm{Vect}((2,1,0),(3,0,-1))$, $T = \{(x,y,z) : x+y=0\}$, $U = \{(x,y,z) : 2x+y+z=0\}$.

1. Donner des bases de S, T et U, puis indiquer leurs dimensions.
2. Déterminer $S \cap T$ et sa dimension.
3. En déduire, sans calcul, le sous-espace $S+T$.
4. Montrer que $S \cap T$ est contenu dans U.
5. Déterminer un sous-espace V tel que $(S \cap T) \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Soit $f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{t}\cos(xt)dt$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{2\pi x} \sqrt{u}\cos(u)du$.
2. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.