Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 4 - Corrigé

Exercice 1. *Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :*

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,dx, \qquad B = \int_0^{1/2} \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}$ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$ et donc A est généralisée en $+\infty$. Soit $t > 0$. Comme $(e^{\arctan(x)})' = \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}$, on a

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,dx = \left[e^{\arctan(x)}\right]_0^t = e^{\arctan(t)} - 1$$

et comme $\lim_{t\to+\infty}(e^{\arctan(t)} - 1) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$, on conclut que A est convergente et vaut $e^{\frac{\pi}{2}} - 1$.

La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}}$ est bien définie et continue sur $]0, \frac{1}{2}]$ et donc B est généralisée en 0. Par ailleurs f est positive. On cherche un équivalent de f en 0. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}e^x}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\sqrt{(1-x)}} = 1$$

et donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc, par le critère des équivalents, B est convergente.

Exercice 2. *Soit* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie par*

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+3y+2z, 2x+z).$$

Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$*. Indiquer la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$*.*

On a $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ z &= 0, \\ x + 3y + 2z &= 0, \\ 2x + 0y + \ \ z &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'algorithme de Gauss, on voit que ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} x - \ \ y \qquad &= 0, \\ 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ et } z = -2y\} = \{(y,y,-2y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,-2))$. Ainsi, $\{(1,1,-2)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puisque c'est un ensemble génerateur avec un seul vecteur, non nul.

Le théorème du rang nous dit que $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$. On en déduit que $\dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 = 2$.

Exercice 3. *On considère les deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies, pour tout* $n \geq 1$*, par*

$$u_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt, \qquad v_n = \int_1^n e^{-t}(1+t)\,dt.$$

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est croissante.*

   Pour tout $n \geq 1$, on a

   $$u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \geq 0$$

   car $e^{-t}\sqrt{1+t}$ est positive et donc son intégrale est positive. D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*,* $u_n \leq v_n$*.*

   Pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a $2t \geq t$, $t^2 \geq 0$ et

   $$(1+t)^2 = 1 + 2t + t^2 \geq 1 + t.$$

   D'où pour tout $t \in [0,+\infty[$, $(1+t) \geq \sqrt{1+t}$. Comme $e^{-t} > 0$, on a $e^{-t}(1+t) \geq e^{-t}\sqrt{1+t}$. En intégrant sur l'intervalle $[1,n]$, on obtient

   $$\int_1^n e^{-t}(1+t)\,dt \geq \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$$

   ce qui donne $v_n \geq u_n$.

3. *Calculer* v_n *en fonction de* n*.*

   En appliquant une intégration par parties ($u(t) = -e^{-t}$, $v(t) = 1+t$; u et v sont de classe C^1)

   $$\int_1^n e^{-t}(1+t)\,dt = \Big[-e^{-t}(1+t)\Big]_1^n + \int_1^n e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}(1+t) - e^{-t}\Big]_1^n = 3e^{-1} - e^{-n}(2+n)$$

   et donc

   $$v_n = 3e^{-1} - e^{-n}(2+n).$$

4. *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée.*

   D'après la question 1, $u_n \leq v_n$ et donc, en utilisant la question précédente, pour tout $n \geq 1$

   $$u_n \leq 3e^{-1} - e^{-n}(2+n).$$

   Or $-e^{-n}(2+n) \leq 0$ et donc $3e^{-1} - e^{-n}(2+n) \leq 3e^{-1}$. On conclut donc $u_n \leq 3e^{-1}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

5. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée, elle est convergente.

Exercice 4. *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*, et les sous-espaces vectoriels* $S = \mathrm{Vect}((2,1,0),(3,0,-1))$*,* $T = \{(x,y,z) : x+y=0\}$*,* $U = \{(x,y,z) : 2x+y+z=0\}$*.*

1. *Donner des bases de S, T et U, puis indiquer leurs dimensions.*

   La matrice associée aux vecteurs $(2,1,0),(3,0,-1)$ est échelonnée, donc ils forment une famille libre. Puisqu'ils engendrent S, ils en font une base. En particulier, $\dim S = 2$.

   On a $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y\} = \{(-y,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(0,0,1) : y,z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1,1,0),(0,0,1))$. Les vecteurs $(-1,1,0),(0,0,1)$ forment une matrice échelonné. Donc, $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de T, et sa dimension est 2.

   Par la même méthode, $U = \{(x,y,-2x-y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,-2) + y(0,1,-1) : x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,0,-2),(0,1,-1))$. Les vecteurs $(1,0,-2),(0,1,-1)$ forment une famille libre et génératrice du sous-espace U, donc ils en font une base. On a $\dim U = 2$.

2. *Déterminer $S \cap T$ et sa dimension.*

   Si $v \in S \cap T$, alors, d'une part, il existe $a,b \in \mathbb{R}$ tels que

   $$v = a(2,1,0) + b(3,0,-1) = (2a+3b, a, -b).$$

   D'autre part, par l'équation définissant T, on a

   $$(2a+3b) + a = 0,$$

   ce qui donne $a = -b$. Donc, v doit être de la forme $(-a,a,a)$. Réciproquement, par les mêmes calculs, on voit que tout vecteur de cette forme appartient à $S \cap T$. On en déduit que $S \cap T$ est le sous-espace engendré par $(-1,1,1)$. En particulier, sa dimension est 1.

3. *En déduire, sans calcul, le sous-espace $S+T$.*

   Par la formule de Grassmann, $\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$, d'où $\dim(S+T) = 3$. C'est-à-dire, $S+T$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, et donc $S+T = \mathbb{R}^3$.

4. *Montrer que $S \cap T$ est contenu dans U.*

   Comme le sous-espace $S \cap T$ est engendrée par $(-1,1,1)$, il suffit de montrer que $(-1,1,1)$ appartient à U. Or, si $(x,y,z) = (-1,1,1)$, on a bien $2x+y+z = -2+1+1 = 0$, ce qui montre que $(-1,1,1) \in U$.

5. *Déterminer un sous-espace V tel que $(S \cap T) \oplus V = \mathbb{R}^3$.*

   On complète la famille $\{(-1,1,1)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$. Si on pose $u = (-1,1,1)$, $v = (0,1,0)$, $w = (0,0,1)$, on voit bien que la matrice associée à ces trois vecteurs est échelonnée, et donc que $\{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose $V = \text{Vect}(v,w)$. Alors, la réunion de la base $\{u\}$ de $S \cap T$ et la base $\{v,w\}$ de V forme une base de $\mathbb{R}^3$. Cela dit que $(S \cap T) \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. *Soit $f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{t}\cos(xt)dt$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{2\pi x} \sqrt{u}\cos(u)du$.*

   Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto u(t) = xt$ est de classe C^1 sur $[0,2\pi]$. On a $du = xdt$ et

   $$\int_0^{2\pi} \sqrt{t}\cos(xt)dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{u(t)}{x}}\cos(u(t))\frac{u'(t)}{x}dt.$$

Comme la fonction $t \to \sqrt{\frac{u(t)}{x}}\frac{\cos(u(t))}{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et comme $u([0,2\pi]) = [0,2\pi x] \subseteq [0,+\infty[$, on peut appliquer la changement de variable $u = u(t)$ et on obtient donc

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\int_0^{2\pi} \sqrt{u(t)}\cos(u(t))u'(t)\,dt = \frac{1}{x\sqrt{x}}\int_0^{2\pi x} \sqrt{u}\cos(u)du.$$

2. *Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.*

Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $u \mapsto \sqrt{u}\cos(u)$ étant continue sur $[0,+\infty[$, elle admet une primitive F sur cet intervalle. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}(F(2\pi x) - F(0)).$$

Donc f est le produit de fonctions dérivables et donc elle est dérivable.

Comme F est la primitive de $\sqrt{u}\cos(u)$ on a $F'(u) = \sqrt{u}\cos(u)$ et donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{1}{x\sqrt{x}})'(F(2\pi x) - F(0)) + \frac{1}{x\sqrt{x}}2\pi\sqrt{2\pi x}\cos(2\pi x) \\ &= \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}(F(2\pi x) - F(0)) + \frac{1}{x}2\pi\sqrt{2\pi}\cos(2\pi x) \\ &= \frac{-3}{2x}f(x) + \frac{1}{x}2\pi\sqrt{2\pi}\cos(2\pi x) \\ &= \frac{1}{2x}(4\pi\sqrt{2\pi}\cos(2\pi x) - 3f(x)). \end{aligned}$$