Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 4

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1.

1. Calculer les primitives de la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-2x+5}$. Préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies.
2. A l'aide du changement de variable $x = \tan t$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan t)(1+(\tan t)^2)}{(\tan t)^2 - 2\tan t + 5} dt.$$

Exercice 2.

1. On considère $E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y-z-t=0 \text{ et } x-z-2t=0\}$.
   (a) Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, on a

   $$u \in E_1 \Leftrightarrow \exists (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u = (x, -t, x-2t, t) \ .$$

   (b) Donner une base et la dimension de E_1.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,0)$, $v_3 = (0,2,0,a)$, $v_4 = (2,0,2,1)$. On note $E_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
   (a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est pas libre.
   (b) Montrer que $2 \leq \dim E_2 \leq 3$.
   (c) Donner, selon la valeur du paramètre a, la dimension et une base de E_2.

Exercice 3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$.

1. Calculer u_0.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e-1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie, notée ℓ.
5. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e - 1 - u_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 e^t \frac{t^n}{1+t^n} dt$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.
6. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4. On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, et on considère les trois éléments suivants de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$L_0(X) = (X-1)(X-2)\ ;\ L_1(X) = X(X-2)\ ;\ L_2(X) = X(X-1)\ .$$

1. Montrer que, pour tout $i, j \in \{0, 1, 2\}$ on a $L_i(j) = 0$ si $i \neq j$, et $L_i(i) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
2. Montrer que la famille (L_0, L_1, L_2) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$Q = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2\ ,$$

   où les α_i sont des réels. Montrer que, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, $\alpha_i L_i(i) = Q(i)$.
4. (Bonus) Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(i) \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$. En utilisant ce qui précède, montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.