Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Math IV - PMI Durée : 1h30

Correction du devoir commun numéro 4 - Partie Algèbre

Partie I

Exercice 1. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Soit $u \in E$ un vecteur de norme 1. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_a : E \to E, x \mapsto x + a < x, u > u$.

1. Montrer que f_a est linéaire.

   Soient $x, x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_a(\lambda x + x') &= \lambda x + x' + a < \lambda x + x', u > u \\ &= \lambda x + x' + (\lambda a < x, u > + a < x', u >)u \text{ (linéarité à gauche)} \\ &= \lambda(x + a < x, u > u) + x' + a < x', u > u \\ &= \lambda f_a(x) + f_a(x'). \end{aligned}$$

2. Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|f_a(x)\| = \|x\|$, alors $a = -2$.

   Appliquons l'hypothèse à $x = u$, cela donne : $\|u + a < u, u > u\| = \|u\|$

   mais comme u est de norme 1, cela devient : $\|u + au\| = 1$

   ou encore $\|(a+1)u| = 1$ puis : $|a+1|\|u\| = 1$.

   La norme de u vaut toujours 1 et cette égalité devient : $|a+1| = 1$. Ainsi $a + 1 = 1$ ou bien $a + 1 = -1$. Mais comme $a \in \mathbb{R}^*$, seule la deuxième égalité est possible, à savoir $a = -2$.

3. Montrer que f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{Vect}(u))^\perp$.

   Notons $V = \text{Vect}(u)$. Soit $x \in E$ quelconque. On le décompose selon la somme directe $E = V + V^\perp$ en l'écrivant $x = \mu u + v'$ avec $\mu \in \mathbb{R}$et $v' \in V^\perp$; le but étant de montrer que $f_{-2}(x) = -\mu u + v'$. On a :

$$\begin{aligned} f_{-2}(x) &= \mu u + v' - 2 < \mu u + v', u > u \\ &= \mu u + v' - 2\mu < u, u > u - 2 < v', u > u \text{ (linéarité à gauche)} \\ &= \mu u + v' - 2\mu < u, u > u \text{ (car } u \perp v'\text{)} \\ &= -\mu u + v' \text{ (car } u \text{ est de norme 1).} \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M, N \in E$, on définit

$$< M, N >= \text{tr}(({}^t\overline{M}) \cdot N).$$

On considère les espaces vectoriels suivants $\mathcal{H} = \{M \in E \mid {}^t\overline{M} = M\}$ et $\mathcal{A} = \{M \in E \mid {}^t\overline{M} = -M\}$.

1. Montrer que $<,>$ est un produit scalaire hermitien sur E.

   La linéarité à droite et le caractère hermitienne se montrent aisément ce qui implique que $<,>$ est une forme sesquilinéaire hermitienne. Vérifions qu'elle est bien définie-positive. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle. Notons m_{ij} ses coefficients. On montre par un calcul fait de nombreuses fois en TD que

$$< M, M >= \sum_{i,j} \overline{m_{ij}} m_{ij} = \sum_{i,j} |m_{ij}|^2.$$

   C'est une somme de nombres positifs dont l'un est non-nul, cette somme est donc strictement positive.

2. Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

   Soit M dans cette intersection. On a alors $-M = \overline{M} = M$ d'où $2M = 0$, i.e. $M = 0$.

3. Soient $M \in E$, $A \in \mathcal{A}$, $H \in \mathcal{H}$ tels que $M = H + A$. Écrire ${}^t\overline{M}$ en fonction de H et A ; puis H et A en fonction de M.

   On a : ${}^t\overline{M} = {}^t(\overline{H + A}) = {}^t\overline{H} + {}^t\overline{A} = H - A$.

   Rappelons que $M = H + A$. En sommant cette égalité et la précédente, on obtient $M + {}^t\overline{M} = 2H$ et en les soustrayant, $M - {}^t\overline{M} = 2A$ d'où

$$H = \frac{1}{2}(M + {}^t\overline{M}) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^t\overline{M}).$$

4. Montrer que $E = \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$.

   La question précédente nous suggère la façon de décomposer une matrice M quelconque comme somme d'une matrice $H \in \mathcal{H}$ et d'une matrice $A \in \mathcal{A}$. Soit donc $M \in E$. Soient

$$H = \frac{1}{2}(M + {}^t\overline{M}) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^t\overline{M}).$$

   On a alors $M = H + A$. De plus ${}^tH = H$ et ${}^tA = -A$ ce qui montre que $M \in \mathcal{H} + \mathcal{A}$. Ainsi $E = \mathcal{H} + \mathcal{A}$. Par la question 2, on peut alors conclure que $E = \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$.

5. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{A}^\perp$.

   Ici l'énoncé est faux. Il suffit de le vérifier sur deux matrices simples comme

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   pour lesquelles on a bien $H \in \mathcal{H}$ et $A \in \mathcal{A}$ mais $< H, A >= i$ au lieu d'être nul.

   Montrons que pour $H \in \mathcal{H}$ et $A \in \mathcal{A}$, on a : $< H, A >$ est imaginaire pur.
   Soient $H \in \mathcal{H}$ et $A \in \mathcal{A}$. Notons $t =< H, A >$. Alors d'une part, nous avons $t =< H, A >= \mathrm{tr}({}^t\overline{H}A) = \mathrm{tr}(HA)$.
   D'autre part, $\bar{t} =< A, H >= \mathrm{tr}({}^t\overline{A}A) = \mathrm{tr}(-AH) = -\mathrm{tr}(AH) = -\mathrm{tr}(HA)$.
   Ainsi $\bar{t} = -t$ ce qui signifie que t est imaginaire pur.

   Réctifions l'énoncé.
   Pour $M, N \in E$, soit $b(M, N) = \mathrm{Re}(< M, N >)$. Alors on montre facilement que b est une forme bilinéaire symétrique sur E (qui est vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et que la forme quadratique associée à b est un produit scalaire.

   On peut alors montrer (et cela découle du fait que $< H, A >\in \mathbb{R} \cdot i$ pour $H \in \mathcal{H}$ et $A \in \mathcal{A}$) que pour ce produit scalaire, les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}$ sont orthogonaux.

   Une dernière remarque. La question suivante reste “juste” dans le sens où pour $M \in E$, $b(M, M) =< M, M >$ ce qui fait que la norme d'un élément de E est la même pour b ou pour $<, >$.

6. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $d(M, \mathcal{A})$ la distance entre M et l'espace $\mathcal{A}$.

   Soient H et A construites comme dans la question 4. Cela donne en particulier $H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Ce que l'on cherche est alors la norme de $M - A$ ou encore celle de H. Le calcul donne $< H, H >= 4$ d'où $\|H\| = 2$.