Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2015-2016

Math III - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie CCP - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

1. L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$? un fermé de $\mathbb{R}^2$?
2. Justifier la continuité de g sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.
3. Déterminer l'ensemble des points de continuité de g.
4. Étudier l'existence de la limite de $g(x,y)$ lorsque $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$ et la calculer si elle existe. La fonction g est-elle bornée sur $\mathbb{R}^2$?
5. L'ensemble $[0;1]^2$ est-il un compact de $\mathbb{R}^2$?
6. Montrer que g admet un minimum et un maximum sur $[0;1]^2$.
7. Démontrer l'inégalité : pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$, $g(x,y) \leq \dfrac{1}{4}$.
8. Montrer que g admet son maximum sur $[0;1]^2$ en un unique point que l'on déterminera.

Problème 1. Un exemple de recherche de racines carrées de matrices

Le but du problème est d'introduire et d'étudier sur des exemples la notion de racine carrée d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dit que $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

Soit a un réel. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}$$

et on note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M_a est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le rang de la matrice $M_a - (1+3a)I_3$.
2. Quelle valeur propre de f_a a-t-on mis en évidence avec la question précédente ? On précisera la dimension de l'espace propre associé.
3. Montrer que $V = (1,1,1)$ est un vecteur propre de f_a. En déduire la forme du polynôme caractéristique de f_a : on distinguera le cas $a = 0$ (on ne demande pas de le calculer explicitement).
4. Montrer que pour tout réel a, l'endomorphisme f_a est trigonalisable puis déterminer toutes les valeurs propres de f_a.

5. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles f_a est diagonalisable.

6. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.

   (a) Déterminer P inversible et D diagonale dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}M_1P = D$.

   (b) En déduire une racine carrée de M_1 (on ne demande pas d'expression explicite).

   (c) Montrer que la matrice $m = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racinées carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (d) En déduire que M_1 admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Dans cette question, on suppose que $a = 0$ et on pose $N = M_0 - I_3$. Calculer N^2 et en déduire l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha I_3 + \beta N$ soit une racine carrée de M_0 dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

8. Dans cette question, on suppose que $a = -\dfrac{1}{3}$. On note $u = f_{-\frac{1}{3}}$.

   (a) Déterminer tous les éléments $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $u(x, y, z) = (0, 1, 1)$.

   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est

   $$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec U.

   (d) En déduire que U ne possède pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (e) La matrice $M_{-\frac{1}{3}}$ possède-t-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Correction du Devoir Surveillé 4 - partie CCP

Correction de l'exercice :

1. - Le complémentaire de A dans $\mathbb{R}^2$ est $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$. Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A^c qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y_n$, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $x \geq y$ ce qui démontre que $(x, y) \in A^c$. Par caractérisation séquentielle, A^c est un fermé de $\mathbb{R}^2$ ce qui démontre que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   - La suite $((0, 1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0, 0) \notin A$. Par conséquent, A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2. La restriction de g à A est donnée par $(x, y) \longmapsto x(1 - y)$ qui est polynomiale donc continue. Puisque A est ouvert, cela entraîne la continuité de g sur A (pour tout $(x, y) \in A$, il existe une boule ouverte centrée en (x, y) sur laquelle la fonction g est égale à sa restriction sur A). On montre de même que l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on conclut de la même manière puisque $g_{|_B}$ est aussi polynomiale. Ainsi, g est continue sur $C = A \cup B$.

3. Il reste à étudier la continuité de g aux points (x, x) avec $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On remarque que par opérations sur les limites,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x\leq y}} g(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x\leq y}} x(1 - y) = x_0(1 - x_0) = g(x_0, x_0)$$
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x>y}} g(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\ x>y}} y(1 - x) = x_0(1 - x_0) = g(x_0, x_0)$$

   Soit $\varepsilon > 0$, par définition des limites ci-dessus, on a :

$$\exists \eta_1 > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \quad \|(x, y) - (x_0, x_0)\| \leq \eta_1 \Rightarrow |g(x, y) - g(x_0, x_0)| \leq \varepsilon,$$
$$\exists \eta_2 > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y, \quad \|(x, y) - (x_0, x_0)\| \leq \eta_2 \Rightarrow |g(x, y) - g(x_0, x_0)| \leq \varepsilon.$$

   En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, on obtient la définition de la limite quand $(x, y) \to (x_0, x_0)$ ce qui démontre que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} g(x, y) = g(x_0, x_0)$. La fontion g est donc continue en (x_0, x_0). Par conséquent, g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4. - On peut remarquer que $g(x, x) = x - x^2 \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ avec $\|(x, x)\|_\infty = |x| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De même, pour $x > 0$, $g(x, 0) = 0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $\|(x, 0)\|_\infty = |x| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La fonction g admet deux limites différentes selon deux directions différentes lorsque $\|(x, y)\| \to +\infty$ ce qui démontre que $g(x, y)$ n'admet pas de limite quand $\|(x, y)\| \to +\infty$.
   - Puisque $g(x, x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, il ne peut pas exister de constante $M \in \mathbb{R}^+$ telle que $|g(x, y)| \leq M$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, la fonction g n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$.

5. L'ensemble $[0; 1]^2$ est le produit de deux segments de $\mathbb{R}$ donc de deux fermés de $\mathbb{R}$. D'après le cours, c'est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus, on peut remarquer que $[0; 1]^2 \subset \overline{B}_{\|\ \|_\infty}((0, 0), 1)$ donc $[0; 1]^2$ est borné. Puisque dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont exactement les ensembles fermés bornés, $[0; 1]^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

6. La fonction g est continue sur le compact $[0; 1]^2$ à valeurs réelles, donc d'après le théorème des bornes atteintes, g est bornée et atteint ses bornes sur $[0; 1]^2$. Elle admet donc un minimum et un maximum sur $[0; 1]^2$.

7. Soit $(x, y) \in [0; 1]^2$ tel que $x \leq y$, alors $g(x, y) = x(1 - y) \leq y(1 - y)$ car $(1 - y) \geq 0$. De même, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > y$, alors $g(x, y) = y(1 - x) \leq x(1 - x)$ car $(1 - x) \geq 0$. La fonction d'une variable

réelle $\varphi : t \in [0;1] \longmapsto t(1-t)$ est dérivable de dérivée $\varphi' : t \longmapsto 1-2t$ qui est positive sur $[0;1/2]$ et négative sur $[1/2;1]$. La fonction φ est donc croissante sur $[0;1/2]$ et décroissante sur $[1/2;1]$. Puisque $\varphi(1/2) = 1/4$, on obtient : $\forall t \in [0;1]$, $\varphi(t) \leq \dfrac{1}{4}$. Il s'ensuit que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) \leq \dfrac{1}{4}$.

8. On a vu que pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$, $g(x,y) \leq \dfrac{1}{4}$. Montrons qu'il existe un unique point $(x,y) \in [0;1]^2$ pour lequel on a égalité. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$, on a vu que $g(x,y) \leq y(1-y)$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} = g(x,y) = x(1-y) \quad &\iff \quad \frac{1}{4} = x(1-y) \leq y(1-y) \leq \frac{1}{4} \\
&\iff \quad \frac{1}{4} = x(1-y) = y(1-y) \\
&\iff \quad x = (1-y) \text{ et } y = \frac{1}{2} \\
&\iff \quad (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On raisonne de même si $x > y$. Ainsi, g admet son maximum en un unique point, à savoir $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Correction du problème :

1. En effectuant successivement les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on trouve

$$\mathrm{rg}(M_a - (1+3a)I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ 0 & -3+3a & 3-3a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \notin \{0;1\}$, la matrice obtenue est échelonnée avec les deux premiers coefficients diagonaux non nuls, donc $\mathrm{rg}(M_a) = 2$. Si $a = 0$, on trouve $\mathrm{rg}(M_0 - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ puisque les deux dernières colonnes sont liées, non nulles. Si $a = 1$, alors $\mathrm{rg}(M_1 - 4I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

2. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f_a - (1+3a)\,\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rg}(f_a - (1+3a)\,\mathrm{Id}) = 1$ si $a \notin \{0;1\}$ et 2 si $a \in \{0;1\}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f_a - (1+3a)\,\mathrm{Id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ce qui démontre que $(1+3a)$ est valeur propre de f_a.

3. D'après M_a, on a $f(V) = (1,-3a,-3a) + (1-4a,-1+2a,-2-a) + (-1+4a,2+a,3+4a) = (1,1,1) = V$. Puisque $V \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit que V est un vecteur propre de f_a associé à la valeur propre 1.
   - Supposons que $a \neq 0$. Alors 1 et $1+3a$ sont deux valeurs propres distinctes de f_a. Puisque le polynôme caractéristique de f_a, noté P_a, est réel, de degré 3, de coefficient dominant -1 et ayant 1 et $1+3a$ comme racines, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_a = -(X-1)(X-(1+3a))$.
   - Si $a = 0$, on a vu que 1 est valeur propre de f_a avec $\dim \mathrm{Ker}(f_a - \mathrm{Id}) = 2$. Par suite, la multiplicité de 1 est au moins 2, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_a = -(X-1)^2(X-\lambda)$.

4. Puisque P_a est scindé sur $\mathbb{R}[X]$, l'endomorphisme f_a est trigonalisable. Par suite, la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité est égale à sa trace. Il vient alors :

$$1 + (1+3a) + \lambda = 3 + 6a \quad \text{d'où} \quad \lambda = 1 + 3a$$

(encore vrai dans le cas $a = 0$ puisque $1 + 3a = 1$). Ainsi, le spectre de f_a est $\{1; 1+3a\}$.

5. On distingue encore une fois le cas $a = 0$.
   - D'après la question précédente, si $a \neq 0$, 1 est une valeur propre simple de f_a et $1+3a$ une valeur propre double. D'après l'encadrement du cours (si l'on note m_λ la multiplicité de λ), $1 \leq \dim \mathrm{Ker}(f_a -$

Id) $\leq m_1 = 1$ d'où l'égalité. De plus, par la question 2, $\dim \operatorname{Ker}(f_a - (1+3a)\operatorname{Id}) = 1$ si $a \neq 1$ et 2 si $a = 1$. Si $a \neq 1$, alors $\dim \operatorname{Ker}(f_a - (1+3a)) \neq m_{1+3a}$ donc f_a n'est pas diagonalisable. Si $a = 1$, alors $\dim \operatorname{Ker}(f_a - \operatorname{Id}) + \dim \operatorname{Ker}(f_a - (1+3a)\operatorname{Id}) = \dim \mathbb{R}^3$ ce qui démontre que f_a est diagonalisable.

- Si $a = 0$, 1 est l'unique valeur propre de f_0. Par conséquent, f_0 est diagonalisable si et seulement si $f_0 = \operatorname{Id}$ ce qui n'est pas le cas puisque $M_0 \neq I_3$.

Finalement, f_a est diagonalisable si et seulement si $a = 1$.

6. On suppose $a = 1$.

   (a) On a vu que V est un vecteur propre associé à 1, donc c'est une base de $\operatorname{Ker}(f_1 - \operatorname{Id})$. De plus, on remarque d'après les colonnes de M_1 que $f_1(1,-1,0) = 4(1,-1,0)$ et $f_1(0,1,1) = 4(0,1,1)$. Ainsi, les deux vecteurs $W = (1,-1,0)$ et $X = (0,1,1)$ sont deux vecteurs libres de $\operatorname{Ker}(f_1 - 4\operatorname{Id})$ qui est de dimension 2, donc c'est une base de $\operatorname{Ker}(f_1 - 4\operatorname{Id})$. Puisque f_1 est diagonalisable, on a $\operatorname{Ker}(f_1 - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f_1 - 4\operatorname{Id}) = \mathbb{R}^3$, donc la famille (V, W, X) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f_1 est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$, la formule de changement de base donne $P^{-1}M_1P = D$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Comme $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une racine carrée de D, la matrice $N = PD'P^{-1}$ vérifie $N^2 = PDP^{-1} = M$ donc N est une racine carrée de M.

   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice M est une racine carrée de m si et seulement

$$M^2 = m \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + bc = 4 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 4 \end{cases}$$

   On remarque que si l'on prend $d = -a$, et que l'on fixe par exemple $c = 1$, les équations des 2ème et 3ème lignes sont vérifiées et la première (égale à la dernière) est équivalente à $a^2 = 4 - b$. Par conséquent, pour tout $c \in [0;4]$, il existe deux réels a vérifiant le système ci-dessus, donc il existe une infinité de matrices M dont le carré est égal à m.

   (d) Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine carrée de m, la matrice par blocs $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ est une racine carrée de D par calculs par blocs, donc $B = PAP^{-1}$ est une racine carrée de M_1. Puisque l'application $\varphi : C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longmapsto PCP^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et puisque m possède une infinité de racines carrées, il s'ensuit que M_1 admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Un calcul du carré de la matrice $M_0 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donne $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a par commutativité de I_3 et N :

$$(\alpha I_3 + \beta N)^2 = \alpha^2 I_3 + 2\alpha\beta N + \beta^2 N^2 = (\alpha^2 - 2\alpha\beta)I_3 + 2\alpha\beta M_0.$$

   Ainsi, si l'on pose $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$, alors $\alpha^2 - 2\alpha\beta = 0$ et $2\alpha\beta = 1$ ce qui entraîne que la matrice $A = I_3 + \dfrac{1}{2}N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une racine carrée de M_0.

8. On suppose que $a = -\dfrac{1}{3}$.

   (a) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) = (0,1,1) \quad &\iff \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -7 \\ 3 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + 7y - 7z = 0 \\ 3x - 5y + 5z = 3 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7}{12} \\ z = \frac{1}{4} + y \end{array} \right. \quad \text{en ayant effectué } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et substitué dans } L_1. \end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid u(x, y, z) = (0, 1, 1)\}$ est égal à $\{(7/12, y, 1/4 + y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est égale à U si et seulement si $u(f1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $u(f_2) = f_1$ et $u(f_3) = f_3$ ce qui équivaut à $f_1 \in \mathrm{Ker}(u)$, $u(f_2) = f_1$ et $f_3 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

   On a vu que $V = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Puisque les deux dernières colonnes de $M_{-1/3}$ sont opposées, le vecteur $W = (0, 1, 1)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u)$. Enfin d'après la question précédente, le vecteur $X = (7/12, 0, 1/4)$ vérifie $u(X) = W$. Étudions la liberté de la famille (W, X, V). Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha W + \beta X + \gamma V = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta 7/12 + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta 1/4 + \gamma = 0 \end{array} \right. \iff \beta = \gamma = \alpha = 0$$

   en ayant effectué $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. La famille (W, X, V) est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est égale à U d'après l'analyse précédente.

   (c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par calculs, on trouve

$$AU = UA \iff \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & d & f \\ 0 & g & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} a = e \\ c = d = f = g = h = 0 \end{array} \right. \iff A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

   Ainsi, l'ensemble des matrices commutant avec U est

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} ; a, b, i \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (d) Supposons que U possède une racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on note A, alors $A^2 = U$. En particulier, $UA = A^3 = AU$, donc il existe $a, bi \in \mathbb{R}$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Mais alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = U$ ce qui entraîne $a^2 = 0$ et $2ab = 1$ qui est contradictoire. Ainsi, U n'admet pas de racine carrée.

   (e) Si la matrice $M_{-\frac{1}{3}}$ possédait une racine carrée $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque $M_{-\frac{1}{3}}$ et U sont deux matrices de u dans deux bases différentes, il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$U = Q^{-1} M_{-\frac{1}{3}} Q = Q^{-1} B^2 Q = (Q^{-1} B Q)^2$$

   ce qui entraînerait l'existence d'une racine carrée de U. Ainsi, $M_{-\frac{1}{3}}$ n'admet aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.