Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ le *commutant* de la matrice A. Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés du commutant d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Première partie : Un exemple en dimension 3

1. Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un espace vectoriel.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ jusqu'à la fin de la partie.
   (a) Expliciter le polynôme caractéristique de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
   (c) Montrer que le vecteur $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre et préciser la valeur propre associée. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $Aw = 2w + v$.
   (d) En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en explicitant une matrice de passage P. On ne demande pas de calculer P^{-1}.
   (e) Déterminer le commutant de la matrice T ainsi que sa dimension.
   (f) i. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Montrer que E et F sont de même dimension.
   ii. Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longmapsto P^{-1}MP \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $C(A)$.
   (g) Existe-t-il un polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2 ?
   (h) Démontrer que $C(A) = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
   (i) En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A.
3. Le résultat de la question précédente est-il vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Deuxième partie : Quelques résultats en dimension n

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Dans toute cette partie, on suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ le commutant de u et on désigne par $\mathbb{R}[u]$ l'ensemble $\mathbb{R}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

4. (a) Donner, en expliquant avec soin, le polynôme minimal de u, noté m_u.

   (b) Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P(u) \in \mathbb{R}[u]$.

      i. Montrer que φ est une application linéaire.

      ii. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = m_u.\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes multiples de m_u.

   (c) En écrivant la division euclidienne d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$ par m_u, montrer que $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \ldots, \varphi(X^{r-1}))$. En déduire que $\mathbb{R}[u]$ est de dimension r.

5. Notons $E_1, \cdots, E_r$ les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.

6. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} C(u) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r) \\ v & \longmapsto & (v_{|E_1}, \ldots, v_{|E_r}) \end{array}$.

   (a) Montrer que Φ est bien définie, puis que Φ est injective.

   (b) Soit $(w_1, \ldots, w_r) \in \mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)$. On considère $w \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout i, $w_{|E_i} = w_i$. Montrer que w est bien défini, puis que $w \in C(u)$. Que peut-on en conclure sur Φ ?

   (c) En déduire la dimension de $C(u)$.

7. Montrer que $\dim C(u) \geq n$.

8. Donner un exemple d'endomorphisme diagonalisable tel que $\dim C(u) = n$, puis donner un exemple d'endomorphisme diagonalisable pour lequel $\dim C(u) > n$.

Correction du Devoir Surveillé 4 - partie CCP

Correction du problème Première partie : Un exemple en dimension 3

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $C(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition et la matrice nulle appartient à $C(A)$, donc $C(A)$ n'est pas vide. Soient $M, N \in C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$$

donc $\lambda M + N \in C(A)$, et ainsi $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Notons P_A le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -2+X & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -1-X \\ 0 & 6-X & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\left[-12 + (6-X)(1+X)\right] \text{ en développant par rapport à } L_3 \\
&= -(X-2)^2(X-3).
\end{aligned}$$

(b) Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice A est donc trigonalisable. Pour savoir si elle est diagonalisable, on étudie la dimension de l'espace propre associé à 2. On a

$$\operatorname{rang}(A - 2I_3) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

car les deux premières lignes sont libres et la première est égale à la troisième. D'après le théorème du rang, on a alors $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rang}(A - 2I_3) = 1$, qui est différente de la multiplicité de 2 en tant que racine de P_A qui vaut 2. Par suite, A n'est pas diagonalisable.

(c) Un calcul direct donne $Av = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2v$. Comme v est non nul, on en déduit que v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. On cherche un vecteur w tel que $Aw = 2w + v$. Soit $w \in \mathbb{R}^3$, posons $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}
Aw = 2w + v &\iff \begin{cases} w_1 + 4w_2 - 2w_3 = 2w_1 + 4 \\ 6w_2 - 3w_3 = 2w_2 + 3 \\ -w_1 + 4w_2 = 2w_3 + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} w_1 = +4w_2 - 2w_3 - 4 \\ 4w_2 = 3w_3 + 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} w_1 = w_3 - 1 \\ 4w_2 = 3w_3 + 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $w = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$ vérifie la condition demandée.

(d) On cherche une base de l'espace propre associé à 3 (ou directement un vecteur propre associé à 3). On peut remarquer que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc en posant $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve que z est un vecteur propre de A associé à 3. La famille $\mathcal{B} = (z, v, w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En effet, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha z + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors on obtient

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta - \frac{3}{4}\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on obtient alors,

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & \frac{3}{4} \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque z est un vecteur propre de A associé à 3, v est un vecteur propre de A associé à 2 et w vérifie $Aw = 2w + v$. D'où le résultat demandé.

(e) On cherche le commutant de T. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned} M \in C(T) \quad &\iff \quad TM = MT \iff \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3d & 2e & e+2f \\ 3g & 2h & h+2i \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{cases} 3b = 2b \\ 3c = b + 2c \\ 2d + g = 3d \\ 2e + h = 2e \\ 2f + i = e + 2f \\ 2g = 3g \\ 2i = h + 2i \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ h = 0 \\ i = e \\ g = 0 \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $C(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} ; a, e, f \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Les matrices étant clairement libres entre elles, on en déduit que $C(T)$ est de dimension 3.

(f) i. φ est un isomorhisme, c'est à dire une application linéaire bijective. Puisqu'elle est injective, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et comme elle est surjective, on a $\mathrm{Im}(\varphi) = F$. D'après le théorème du rang, on a alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rang}(\varphi) = \dim(F)$.

ii. • Montrons que l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans lui-même. Il est clair que l'application est linéaire. De plus, l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et vérifie : pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\psi(\Phi(M)) = P^{-1}(PMP^{-1})P = M$ et $\Phi(\psi(M)) = P(P^{-1}MP)P^{-1} = M$, ce qui prouve que ψ est bijective d'inverse Φ. Ainsi, ψ est un isomorphisme.

• Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a l'équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C(A) \quad &\iff \quad MA = AM \iff M(PTP^{-1}) = (PTP^{-1})M \iff (P^{-1}MP)T = T(P^{-1}MP) \\ &\iff \quad \psi(M) \in C(T). \end{aligned}$$

Ainsi, $C(A) = \psi^{-1}(C(T)) = \Phi(C(T))$. Comme un isomorphisme conserve les dimensions, on en déduit que $\dim C(A) = 3$.

(g) On a vu que A n'est pas diagonalisable, donc son polynôme minimal, noté m_A, n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on sait aussi que m_A divise P_A ; de plus, P_A est unitaire et possède exactement les mêmes racines que P_A. Par conséquent, on a $m_A = (X-2)^2(X-3)$. Comme m_A divise tout polynôme annulateur de A et est de degré 3, il ne peut pas exister de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

(h) On a déjà que I_3, A et A^2 commutent avec A, donc n'importe quelle combinaison linéaire de ces trois matrices commute avec A. Par suite, on a l'inclusion $\mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\} \subset C(A)$. De plus, supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, alors le polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2. C'est donc le polynôme nul et ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille $\{I_3, A, A^2\}$ est libre. Par conséquent, $\mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$ est de même dimension que $C(A)$ (à savoir 3), donc ces deux ensembles sont égaux.

(i) Puisque $C(A) = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$, toute matrice commutant avec A s'écrit comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2 donc est un polynôme en A (de degré inférieur ou égal à 2). Il reste à démontrer que tout polynôme en A commute avec A. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a alors

$$P(A)A = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) A = \sum_{k=0}^{n} a_k A^{k+1} = A \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) = AP(A)$$

donc tout polynôme en A commute avec A. Ainsi, le commutant de A est égal à l'ensemble des polynômes en A.

3. Le résultat précédent est faux pour toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, si l'on prend $A = I_3$, alors $C(A) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque toutes les matrices commutent avec la matrice identité. Cependant, les polynômes en I_3 sont des matrices diagonales, donc $C(I_3)$ n'est pas égal à l'ensemble des polynômes en I_3.

Deuxième partie : Quelques résultats en dimension n

4. (a) Puisque u est diagonalisable, m_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. De plus, m_u est unitaire, et ses racines sont exactement les valeurs propres de u. Ainsi, $m_u = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_i)$.

   (b) i. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$ donc φ est linéaire.

   ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(P) = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff m_u \text{ divise } P \iff P \in m_u \mathbb{R}[X].$$

   (c) On a $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(P) \mid P \in \mathbb{R}[X]\} = \{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\} = \mathbb{R}[u]$. On ne peut pas appliquer le théorème du rang car $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, d'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $P = m_u X + R$, avec $\deg(R) < \deg(m_u) = r$. Par suite, $\varphi(P) = \varphi(m_u Q) + \varphi(R) = \varphi(R)$ car $\mathrm{Ker}(\varphi) = m_u \mathbb{R}[X]$. De plus, puisque $\deg(R) \leq r - 1$, il existe $a_0, \dots, a_{r-1} \in R$, tels que $R = a_0 + \cdots + a_{r-1} X^{r-1}$, et ainsi $\varphi(P) = \varphi(R) = a_0 \varphi(1) + \cdots + a_{r-1} \varphi(X^{r-1})$. On en déduit que $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Im}(u)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(\varphi(1), \dots, \varphi(X^{r-1}))$. Réciproquement, comme chaque élément appartient à $\mathbb{R}[u]$, on a directement $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \dots, \varphi(X^{r-1}))$.

   La famille $(\varphi(1), \dots, \varphi(X^{r-1}))$ étant génératrice de $\mathbb{R}[u]$, il nous reste à étudier sa liberté. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$ des réels tels que $\alpha_0 \varphi(1) + \cdots + \alpha_{r-1} \varphi(X^{r-1}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors par linéarité de φ, on en déduit que le polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{r-1} X^{r-1}$ est dans le noyau de φ, donc c'est un multiple de m_u avec $\deg(m_u) = r$, ce qui entraîne que ce polynôme est nul, donc tous les α_i sont nuls. La famille est donc libre, ainsi, c'est une base de $\mathbb{R}[u]$ ce qui implique que $\dim \mathbb{R}[u] = r$.

   Remarque : on aurait aussi pu démontrer que $\mathbb{R}[u] = \mathrm{Im}(\tilde{\varphi})$ où $\tilde{\varphi} = \varphi_{|\mathbb{R}_{r-1}[X]} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{r-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[u] \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$, que $\tilde{\varphi}$ est bijective et utiliser le théorème du rang ; cette méthode étant un peu plus rapide.

5. Puisque u est diagonalisable, E est égal à la somme directe des sous-espaces propres, c'est-à-dire $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.

6. (a) Soit $v \in C(u)$. Puisque v commute avec u, il laisse stable les espaces propres de u (en effet, soient $i \in [\![1;r]\!]$ et $x \in E_i$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$ donc $v(x) \in E_i$), ainsi, la restriction de v à l'espace propre E_i de u est un endomorphisme de E_i, donc Φ est bien définie.

   Soit $v \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $\Phi(v) = (v_{|E_1}, \dots, v_{|E_r}) = (0_{\mathcal{L}(E_1)}), \dots, 0_{\mathcal{L}(E_r)})$. En particulier, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, v est nulle sur une base $\mathcal{B}_i$ de E_i. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$, la réunion des $\mathcal{B}_i$, notée $\mathcal{B}$, est une base de E. Par conséquent, v s'annule sur une base de E, donc v est l'endomorphisme nul. Le noyau de Φ est donc réduit à $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, et ainsi Φ est injective.

   (b) Comme il suffit de définir un endomorphisme sur une base de E et que w est définie sur $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$, w est bien définie. Soit $i \in [\![1;p]\!]$ et $x_i \in E_i$, alors $u(w(x_i)) = u(w_i(x_i)) = \lambda_i w_i(x_i)$ car $w_i \in \mathcal{L}(E_i)$ et $x_i \in E_i$. D'où $u(w(x_i)) = \lambda_i w(x_i) = w(\lambda_i x_i) = w(u(x_i))$. Ainsi, u et v commutent sur chacun des E_i. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$, on en déduit que $v \in C(u)$.

   On en déduit que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   (c) Ainsi, $\dim C(u) = \dim(\mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)) = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathcal{L}(E_i) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2$ puisque u est diagonalisable donc pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.

7. Comme pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i \geq 1$, on a $m_i^2 \geq m_i$, donc $\dim C(u) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i = \deg(P_u) = n$, d'où le résultat demandé.

8. Soit u un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes, alors pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, on a $m_i = 1$, donc $\dim C(u) = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 = n$. Si l'on prend l'identité de E, on a alors $C(u) = \mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 > n$ (pour $n > 1$).