Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Math III - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Partie ALGÈBRE

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 2+a & 4-a & 2-a \\ 2 & a & -2 \\ -2 & 4-a & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme $\chi_A = (X-b)(X-b-a)(X-a)$ où b est un réel à déterminer.
2. Déterminer, en fonction des valeurs de a, si la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Quel est, en fonction des valeurs de a, le polynôme minimal de A ?
4. On suppose dans cette question que $a = 1$.
   (a) Diagonaliser A.
   (b) Déterminer **une** matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$ (il n'est pas nécessaire de faire un calcul explicite d'inverse pour répondre).

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f - 5\,\mathrm{Id}_E$ est bijectif,

$$(f - 5\,\mathrm{Id}_E)^2 \circ (f^2 + f - 2\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^2 + f - 2\,\mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Montrer que 5 n'est pas valeur propre de f.
2. Montrer que f n'est pas diagonalisable. L'endomorphisme f est-il trigonalisable ?
3. Montrer que la trace de f appartient à $\mathbb{Z}$.

Partie ANALYSE

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}).$$

On note $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la fonction somme de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $]0; +\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.
4. Justifier que F est continue sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4. On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence noté R de cette série entière.
2. Déterminer le domaine de convergence (dans $\mathbb{R}$) de cette série entière.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n : [-R; 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u_n(x) = \frac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-R; 0]$. *Indication : pour $x \in [-R; 0]$, regarder le signe de $u_n(x)$ selon les valeurs de n.*
4. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la fonction somme de cette série de fonctions et on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

   Calculer explicitement $\int_{-1/\sqrt[3]{5}}^{0} S(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction du Devoir Surveillé 4 - partie commune

Correction de l'exercice 3

1. Le domaine de définition de F correspond au domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, alors $e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$. Ainsi, la sére numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \ln(1+e^0) = \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) \neq 0$ donc la série numérique $\sum f_n(0)$ diverge aussi grossièrement. Si $x > 0$, alors $e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par les développements limités usuels en 0 :

$$0 \leq f_n(x) = \ln(1+e^{-nx}) = e^{-nx} + \underset{n\to+\infty}{o}(e^{-nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nx} = (e^{-x})^n$$

   Or $x > 0$ donc $0 < e^{-x} < 1$ et la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, le domaine de définition de F est $]0;+\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la fonction $x \longmapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, par composition, la fonction f_n est décroissante sur $]0;+\infty[$ (on peut justifier que f_n est dérivable et montrer que pour tout $x > 0$, $f_n'(x) \geq 0$ si on préfère). Comme de plus elle est à valeurs positives et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \ln(1+e^0) = \ln(2)$, la fonction f_n est bornée sur $]0;+\infty[$ et sa décroissance entraîne

$$\|f_n\|_{\infty;]0;+\infty[} = \sup_{x\in]0;+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in]0;+\infty[} f_n(x) = \lim_{x\to 0} f_n(x) = \ln(2).$$

   La série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty;]0;+\infty[}$ diverge (grossièrement), donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0;+\infty[$.

3. Soit $a > 0$. Par l'étude précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et

$$\|f_n\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sup_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$$

   Or comme $a > 0$, l'étude de la convergence simple effectuée dans la question 1 montre que la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sum f_n(a)$ converge, ce qui prouve la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[a;+\infty[$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonction continues. De plus, pour tout segment $[a;b]$ inclus dans $]0;+\infty[$, on a vu que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, donc sur $[a;b]$. Par conséquent, elle converge uniformément sur $[a;b]$. Par le théorème de continuité des séries de fonctions, on en déduit que la fonction somme F est continue sur $]0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 4

1. Il s'agit ici d'une série lacunaire Notons R son rayon de convergence. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}$. Si $x \neq 0$, alors $|u_n| > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{5^{n+1}(3n+4)\,|x|^{3n+3}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{5^n(3n+1)\,|x|^{3n}} = \frac{5\,|x|^3\,(3n+4)n^2}{(3n+1)(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5\,|x|^3\,3n^3}{3n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5\,|x|^3$$

   Par ailleurs, la stricte croissance de la fonction cubique (et donc de sa réciproque $t \longmapsto t^{1/3}$) sur $\mathbb{R}$ entraîne

$$5\,|x|^3 < 1 \iff |x|^3 < \frac{1}{5} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

Ainsi, si $|x| < 1/\sqrt[3]{5}$ (avec $x \neq 0$), alors $5\,|x|^3 < 1$ et la règle de d'Alembert pour les séries numériques implique la convergence de la série numérique $\sum |u_n|$. On en déduit que la série numérique $\sum u_n = \sum \dfrac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}$ converge absolument pour tout x non nul tel que $|x| < 1/\sqrt[3]{5}$ donc $R \geq 1/\sqrt[3]{5}$.
De même, si $|x| > 1/\sqrt[3]{5}$, alors $5\,|x|^3 > 1$ et la règle de d'Alembert pour les séries numériques implique la divergence grossière de la série numérique $\sum |u_n|$. On en déduit que la série numérique $\sum u_n = \sum \dfrac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}$ diverge aussi grossièrement pour tout x tel que $|x| > 1/\sqrt[3]{5}$ donc $R \leq 1/\sqrt[3]{5}$. Par conséquent, on obtient l'égalité $R = 1/\sqrt[3]{5}$.

2. Notons D le domaine de convergence de la série entière étudiée. Par le cours, on sait que $]-R;R[\subset D \subset [-R;R]$ donc il reste à étudier la convergence en $x = R$ et $x = -R$. Pour $x = R$, on a

$$\frac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n} = \frac{5^n(3n+1)}{n^2} \frac{1}{5^n} = \frac{3n+1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$$

Puisque la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (et $3 \neq 0$), par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}$ diverge.
Pour $x = -R$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$v_n := \frac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n} = \frac{(-1)^{3n}(3n+1)}{n^2} = (-1)^n \frac{3n+1}{n^2} \quad \text{avec} \quad \frac{3n+1}{n^2} \geq 0$$

donc la série numérique $\sum v_n$ est alternée. De plus, $|v_n| = \dfrac{3n+1}{n^2} = \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $n \geq 1$, $0 < n^2 \leq (n+1)^2$ d'où par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$|v_{n+1}| = \frac{3}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = |v_n|$$

Ainsi la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par le critère des séries alternées, la série numérique $\sum v_n$ est donc convergente. Ainsi, le domaine de convergence D est $[-R;R[$.

3. Soit $x \in [-R;0]$, alors on peut écrire $x = -|x|$ ce qui entraîne : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{5^n(3n+1)\,|x|^{3n}}{n^2}$ avec $\dfrac{5^n(3n+1)\,|x|^{3n}}{n^2} \geq 0$, donc la série numérique $\sum u_n(x)$ est une série alternée. Comme $5\,|x|^3 \leq 1$, on montre comme ci-dessus que

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad |u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)|$$

donc la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées (ce qui redémontre la fait que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[-R;0]$). Si l'on note $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, le critère des séries alternées entraîne alors

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{5^{n+1}(3n+4)\,|x|^{3n+3}}{(n+1)^2} = \frac{(5\,|x|^3)^{n+1}(3n+4)}{(n+1)^2} \leq \frac{3n+4}{(n+1)^2}.$$

La majoration obtenue étant valable pour tout $x \in [-R;0]$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction R_n est bornée sur $[-R;0]$, et comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de l'ensemble, on a aussi

$$\|R_n\|_{\infty;[-R;0]} = \sup_{x\in[-R;0]} |R_n(x)| \leq \frac{3n+4}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\|R_n\|_{\infty;[-R;0]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-R;0]$. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-R;0]$.

4. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $[-R, 0]$, et que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[-R; 0]$, le théorème d'interversion série/intégrale entraîne

$$\int_{-R}^{0} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-R}^{0} \frac{5^n(3n+1)}{n^2} x^{3n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^2} \left[x^{3n+1}\right]_{-R}^{0} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{5^n}{n^2} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{3n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12\sqrt[3]{5}}$$