Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2+y^2-4)(x^2+y^2-9) \leq 0\}.$$

Exercice 2. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes

1. Soit E un espace vectoriel normé. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $A \subset E$, on considère

$$\lambda A = \{\lambda x; x \in A\}$$

.

   a. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x \in E$, $r > 0$ on a

$$\lambda B(x,r) = B(\lambda x, |\lambda| r).$$

   b. Soit O un ouvert de E. Montrer que λO est un ouvert de E pour tout

   — Soit $f\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne ($\|.\|_2$), on considère les parties

   $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$ et $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de la fonction f.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad (E)$$

avec $y(0) = 1$.

On suppose que cette équation admet une solution y développable en série entière dans un intervalle $]-R, R[$ où R est un réel strictement positif. On écrit alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Calculer a_0

2. Calculer a_1 et trouver une relation entre a_{n+1} et a_{n-1} pour tout $n \geq 1$. Déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le développement de y.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série obtenue. Est ce que y est bien une solution de (E) ? Exprimer y à l'aide des fonctions usuelles .