
Devoir n° 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.
La partie d'analyse et la partie d'algèbre doivent être rédigées sur deux feuilles distinctes.

Partie algèbre

Exercice 1. Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{bmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$. On considère l'application f définie par

$$f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, on note $P_k(X) = (1 - X)^k(1 + X)^{n-k}$. Calculer $f(P_k)$.
3. En déduire que f est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
4. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme f est-il bijectif ?

Exercice 3. Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour $n \geq 2$ et $x \in [0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + (n \ln n)x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{2ax}{1 + ax^2} \, \mathrm{d}x = \ln(1 + a)$$
   (b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$. On pourra s'aider des questions (a) et (b). En déduire que la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{n^4 + n^3 x^3}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,a]$,
$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{a^3}{n^2}$$
4. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que S est une fonction continue.
5. Trouver une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{C}{n}$$
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n = (-1)^n f_n$. Montrer que la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.