Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

Maths IV PMI

DS du 01 avril 2025

Exercice 1.

On considère sur l'espace $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

1. Expliquez, sans calcul, pourquoi la matrice ${}^tA\,A$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale et pourquoi les valeurs propres de ${}^tA\,A$ sont forcément toutes positives.
2. Donner explicitement une matrice $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA\,A = P\,D\,{}^tP$, où D est la matrice diagonale diag(16, 1, 1).
3. Justifier l'existence d'une matrice $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA\,A = S^2$ et donner explicitement une telle matrice.
4. Démontrez qu'il existe une unique matrice U orthogonale telle que $A = US$.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique noté $< \cdot , \cdot >$. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^3$, soit $\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3\}$ ses valeurs propres et soit (v_1, v_2, v_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de u (telle que v_i est associé à λ_i). Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

i) Les valeurs propres de u sont toutes strictement positives

ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,; < x\,,\, u(x) >= 1\}$ est un ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que si les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^3$ dans la base (v_1, v_2, v_3) sont (x_1, x_2, x_3) alors
$$< x\,,\, u(x) >= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, x_i^2 \,.$$
2. Montrez que S est un ensemble fermé.
3. Montrez que i) implique ii)
4. On veut montrer que ii) implique i).
   (a) Que peut on dire de S si u est l'endomorphisme nul ? Dans la suite on exclut ce cas.
   (b) Montrez que si u admet au moins une valeur propre nulle, alors S est non borné.
   (c) Montrez que si u admet au moins une valeur propre strictement négative et une strictement positive, alors S est non borné.
   (d) Montrez que ii) implique i).

Exercice 3.

Déterminez si la limite quand $(x, y) \to (0, 0)$ existe et déterminez la limite quand elle existe, pour les trois fonctions suivantes :

1. $$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

2. $$g(x, y) = \frac{2x^2 - y^2 + 4xy}{4x^2 + y^2}$$

3. $$h(x, y) = \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^3}$$

4. Déterminez la limite lorsque $||(x, y)||$ tend vers $+\infty$ de la fonction
$$k(x, y) = \frac{(3x^2 + y^2)^{2/3}}{2x^2 - xy + 2y^2} \, .$$