Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice 1. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note f_1, f_2, f_3, f_4 les éléments de E définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \operatorname{ch} x, \quad f_2(x) = \operatorname{sh} x, \quad f_3(x) = x \operatorname{ch} x, \quad f_4(x) = x \operatorname{sh} x.$$

Notons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2. Montrer que $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel F et exprimer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. (a) Calculer A^2, A^4. On pourra utiliser des calculs par blocs.
   (b) En déduire que $\forall f \in E$, $f^{(4)} - 2f'' + f = 0$.
4. Démontrer que le spectre de D est inclus dans $\{-1; 1\}$.
5. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?

Autour du théorème d'Abel pour les séries entières

Dans tout le problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1. On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. Généralités

1. En utilisant des développements en série entière "usuels", donner dans chaque cas, un exemple de suite $(a_n)_n$ telle que :
   (a) $(a_n)_n$ vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$,
   (b) $(a_n)_n$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$,
   (c) $(a_n)_n$ ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$,
   (d) la série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1; 1[$.

   On justifiera soigneusement les différentes réponses.

2. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple :* Déduire de la question précédente la valeur de la somme $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

   (On pourra utiliser une décomposition en éléments simples bien choisie.)

II. Le théorème d'Abel

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

   On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie quand x tend vers 1^- (théorème d'Abel).

   On pose $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0;1]$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

   (a) Simplifier, pour tout $x \in [0;1]$, $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p}$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0;1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum\limits_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{p-1}$.

   (c) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, et tout entier naturel p, on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, pour tout $x \in [0;1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

   (d) Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple :*

   (a) Retrouver le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$.

   (b) En utilisant le théorème d'Abel et la question précédente, écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application :* On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

   (a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-il une série convergente ? (On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ pour $n \geq 1$ et minorer le terme général du produit de Cauchy en étudiant les variations de $g : x \longmapsto x(n-x)$.)

   (b) Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ convergent.

   Démontrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Correction du Devoir Surveillé 3 - partie CCP

Correction de l'exercice :

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 \operatorname{ch} x + \lambda_2 \operatorname{sh} x + \lambda_3 x \operatorname{ch} x + \lambda_4 x \operatorname{sh} x = 0. \qquad (*)$$

• Première méthode : En évaluant $(*)$ en 0, on obtient $\lambda_1 = 0$. Puis en dérivant $(*)$, on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \operatorname{ch} x + \lambda_3 \operatorname{ch} x + \lambda_3 x \operatorname{sh} x + \lambda_4 \operatorname{sh} x + \lambda_4 x \operatorname{ch} x = 0 \quad (**)$. En évaluant ceci en 0, cela donne $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. De plus, en divisant $(**)$ par $x \operatorname{ch} x$ et en étudiant la limite du résultat obtenu quand $x \to +\infty$, on a aussi $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$. En injectant ces deux relations dans $(**)$, on en déduit $\lambda_4(\operatorname{sh} x - x \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, et en particulier pour $x = 1$: $\lambda_4 \operatorname{ch} 1 = 0$ d'où $\lambda_4 = 0$. Par conséquent, $\lambda_3 = 0 = \lambda_2$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre.

• Deuxième méthode. On utilise des développements limités au voisinage de 0. On a

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \operatorname{ch} x + \lambda_2 \operatorname{sh} x + \lambda_3 x \operatorname{ch} x + \lambda_4 x \operatorname{sh} x \\
= \; & \lambda_1 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \lambda_2 \left(x + \frac{x^3}{3!}\right) + \lambda_3 \left(x + \frac{x^3}{2!}\right) + \lambda_4 \left(x^2 + \frac{x^4}{3!}\right) + o_0(x^4) \\
= \; & \lambda_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4\right) x^2 + \left(\frac{\lambda_2}{6} + \frac{\lambda_3}{2}\right) x^3 + \left(\frac{\lambda_1}{24} + \frac{\lambda_4}{6}\right) + o_0(x^4)
\end{aligned}$$

Comme cette quantité est nulle, par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 = 0 \\ \dfrac{\lambda_2}{6} + \dfrac{\lambda_3}{2} = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$$

ce qui démontre la liberté de la famille $\mathcal{B}$. Comme par définition, $\mathcal{B}$ est génératrice de F, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de F. Ainsi, F est de dimension 4.

2. L'application dérivation est clairement linéaire. Il reste donc à montrer que $D(F) \subset F$. Pour cela, on démontre que la base $\mathcal{B}$ est envoyée par D sur des éléments de F. On a $D(f_1) = f_2$, $D(f_2) = f_1$, $D(f_3) = f_1 + f_4$ et $D(f_4) = f_2 + f_3$. Ainsi, D est linéaire et $D : F \longrightarrow F$, donc D est un endomorphisme de F.

On a de plus $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) Notons $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = \begin{pmatrix} J & I \\ 0 & J \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 2J \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2J \\ 0 & I \end{pmatrix}$.
Puis $A^4 = \begin{pmatrix} I & 4J \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

   (b) On remarque que $A^4 - 2A^2 + I_4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$. On en déduit donc que $D^4 - 2D^2 + \mathrm{Id} = 0$. Ainsi, pour tout $f \in F$, on a $f^{(4)} - 2f'' + f = 0$.

4. Comme on a $D^4 - 2D^2 + \mathrm{Id}_F = 0_F$, le polynôme $X^4 - 2X + 1 = (X^2 - 1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$ est annulateur de D. Puisque le spectre de D est inclus dans l'ensemble des racines de n'importe quel polynôme annulateur de D, on en déduit $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(D) \subset \{1; -1\}$.

5. Soit on calcule explicitement $\operatorname{Ker}(D - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(D + \mathrm{Id})$ afin de savoir si 1 et -1 sont effectivement valeurs propres et de déterminer leurs dimensions respectives. Soit on remarque que $A - I_4 \neq 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$,

$A + I_4 \neq 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ et $(A - I_4)(A + I_4) = A^2 - I_4 \neq 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$. Par suite le polynôme minimal de D est $(X-1)^2(X+1)$, $(X-1)(X+1)^2$ ou $(X-1)^2(X+1)^2$. Puisque le polynôme minimal de D n'est pas scindé à racines simples, D n'est pas diagonalisable.

Correction du problème :

I. Généralités

1. (a) Posons pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Alors la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 (par la règle de D'Alembert pour les séries entières par exemple) et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge d'après le critère des séries alternées puisque $|a_n|$ tend en décroissant vers 0. De plus, pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \ln(1+x)$ qui tend vers $\ln 2$ lorsque $x \to 1^-$.

   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$. Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1, mais $\sum a_n$ ne converge pas puisque a_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi, $(\mathcal{P}1)$ n'est pas vérifiée. Cependant, pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $x \to 1^-$.

   (c) On pose $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum a_n x^n$ a clairement pour rayon de convergence 1. De plus, a_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ donc $\sum a_n$ diverge grossièrement, et pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{1}{1-x}$ n'admet pas de limite finie lorsque $x \to 1^-$. Ainsi, ni $(\mathcal{P}1)$, ni $(\mathcal{P}2)$ n'est vérifiée.

   (d) On considère encore la suite $(a_n)_n$ telle que $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons $u_n : x \longmapsto a_n x^n = x^n$. On sait que si $\sum u_n$ converge uniformément sur $]-1;1[$, alors la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle. Or $\|u_n\|_{\infty,]-1;1[} = \sup\limits_{x \in]-1;1[} |x|^n = \sup\limits_{x \in [0;1[} x^n = 1$ (par parité de $x \longmapsto |x|^n$ et par croissance de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$) qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Par suite, $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1;1[$, c'est-à-dire que la série entière $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1;1[$. (Par contre, d'après le cours, on sait qu'elle converge normalement sur tout **segment** inclus dans $]-1;1[$.)

2. On suppose que la série $\sum |a_n|$ converge. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1;1]$, $u_n(x) = a_n x^n$. Alors pour tout $x \in [-1;1]$, on a $|u_n(x)| \leq |a_n|$. Comme le sup est le plus petit des majorants, on en déduit que $0 \leq \|u_n\|_{\infty,[-1;1]} \leq |a_n|$. Or $\sum |a_n|$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|u_n\|_{\infty,[-1;1]}$ converge et ainsi $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1;1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $[-1;1]$. D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions, on en conclut que la fonction $f : x \in [-1;1] \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-1;1]$.

   Par conséquent, f admet une limite lorsque x tend vers 1^- qui est $f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple :* Posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$. Alors $|a_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum |a_n|$ converge et le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à 1 (on a $|a_{n+1}|/|a_n| \longrightarrow 1$ quand $n \to +\infty$).

   Notons $f : x \in]-1;1[\longmapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$. D'après la question précédente, on sait que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$. Soit $x \in]-1;1[$, en décomposant en élements simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X-1)}$, on obtient

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}\right)x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n$$

puisque les deux séries entières qui apparaissent ont un rayon de convergence égal à 1 et $x\in]-1;1[$. Ainsi, pour tout $x\in]-1;1[$, on a

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n-x+x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=(1+x)\ln(1+x)-x\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}2\ln2-1.$$

On obtient donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2\ln2-1$.

II. Le théorème d'Abel

4. (a) Soit $x\in[0;1]$. Comme pour tout $p\geq1$, on a $r_{n+p-1}-r_{n+p}=\displaystyle\sum_{k=n+p}^{+\infty}a_k-\sum_{k=n+p+1}^{+\infty}a_k=a_{n+p}$, on en déduit

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p}=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{n+p}x^{n+p}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k=R_n(x).$$

(b) Soit $x\in[0;1[$. On a

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p-1}x^{n+p}-\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p}x^{n+p}\quad\text{car les deux séries numériques convergent puisque } x\in[0;1[\\&=\sum_{p=0}^{+\infty}r_{n+p}x^{n+p+1}-\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p}x^{n+p}\\&=r_nx^{n+1}+\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p}(x^{n+p+1}-x^{n+p})\\&=r_nx^{n+1}+x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p}x^{p-1}.\end{aligned}$$

(c) Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\sum a_n$ converge, le reste r_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $|r_{n+p}|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n\geq n_0$ et $x\in[0;1[$, avec l'écriture précédente de $R_n(x)$, on trouve

$$|R_n(x)|\leq|r_nx^{n+1}|+|x^{n+1}(x-1)|\left|\sum_{p=1}^{+\infty}r_{n+p}x^{p-1}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{p=1}^{+\infty}x^{p-1}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\frac{1}{1-x}=\varepsilon.$$

De plus, pour $x=1$, on a $|R_n(x)|=\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\right|=|r_n|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$. Donc on a bien $|R_n(x)|\leq\varepsilon$ pour tout $x\in[0;1]$.

(d) On vient de démontrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall x\in[0;1]$, $|R_n(x)|\leq\varepsilon$, ce qui implique que $\|R_n\|_{\infty,[0;1]}\leq\varepsilon$. Par conséquent, $\|R_n\|_{\infty,[0;1]}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$ et donc la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n:x\longmapsto a_nx^n$ converge uniformément sur $[0;1]$. Puisque de plus, u_n est continue sur $[0;1]$ pour tout n, on en déduit que $f=\sum u_n$ est continue sur $[0;1]$. Ainsi, f admet une limite lorsque x tend vers 1^- et $\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

5. On vient de démontrer que si $\sum a_n$ converge alors $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ existe et est finie. Par contraposée, si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\sum a_n$ diverge.

6. *Exemple :*

   (a) On sait que pour tout $x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ et le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. De plus, on a aussi $\dfrac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisqu'une série entière est intégrable terme à terme sur son disque ouvert de convergence (il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence ce qui permet d'échanger intégrale et série), on obtient $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-1;1[$. Enfin, les rayons de convergence d'une série entière et de sa dérivée sont égaux, donc le rayon de convergence du développement de $x \longmapsto \arctan x$ autour de 0 est $R = 1$.

   (b) Puisque le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ vaut 1 et que $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge d'après le critère des séries alternées, on peut appliquer le théorème d'Abel. On obtient

$$\lim_{x \to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

7. (a) Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}}$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent (mais ne convergent pas absolument). Le terme général du produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est, pour tout n,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^{1/4}} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^{1/4}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{1/4}}$$

(la somme ne commence qu'à 1 car le terme u_0 est pris égal à 0 et termine à $n-1$ car v_0 est aussi nul). On étudie les variations de $g : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x(n-x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et de dérivée $g'(x) = n - 2x$ positive si et seulement $x \in [0; n/2]$. La fonction étant positive sur $[0; n]$, on en déduit que pour tout $x \in [0; n]$, $g(x) \leq g(n/2) = \dfrac{n^2}{4}$. Ainsi, on a

$$|w_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{1/4}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} {\frac{4}{n^2}}^{1/4} = \frac{(n-1)\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent, $\sum w_n$ diverge grossièrement. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est donc pas forcément une série convergente.

   (b) Comme $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. D'après le cours sur les séries entières, on sait que pour tout $x \in]-1;1[$, $W(x) = U(x)V(x)$, où l'on a noté $U : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ (notations similaires pour V et W).

D'après le théorème d'Abel appliqué aux trois séries (si le rayon de convergence d'une série est strictement supérieur à 1, on a même directement sans le théorème que $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$), on sait que $U(x)$ tend vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque $x \to 1^-$, de même avec V et W. On passant à la limite lorsque x tend vers 1^- dans l'égalité $W(x) = U(x)V(x)$, on obtient le résultat voulu.