
Partie CCP - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Dans ce problème, on étudie les sous-espaces stables de certains endomorphismes particuliers. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les questions préliminaires peuvent être utilisées dans tout le problème mais les autres parties sont indépendantes entre elles.

Questions préliminaires :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E de dimension 0 et n stables par f.
2. Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

I. Un cas particulier :

Dans cette partie, on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3, une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E et l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer le spectre de f ainsi que les espaces propres associés (notés $E_\lambda(f)$).
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 stables par f.
6. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, stable par f. On note $f_{|F}$ l'endomorphisme induit par f sur F.
   (a) Donner la forme de la matrice de f dans une base de E dont les premiers éléments forment une base de F.
   (b) Montrer que le polynôme caractéristique de $f_{|F}$ divise celui de f.
   (c) Étudier la diagonalisabilité de $f_{|F}$. Soit λ une valeur propre de $f_{|F}$. Montrer que l'espace propre de $f_{|F}$ associé à λ est égal à $E_\lambda(f)$.
   (d) En déduire que F est la somme directe de deux sous-espaces propres de f.
7. Trouver tous les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

II. Cas d'un endomorphisme non diagonalisable :

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. (a) Calculer le polynôme caractéristique de f, noté χ_f (on le donnera sous forme factorisée dans $\mathbb{R}[X]$).

   (b) Justifier que f n'est pas diagonalisable.

9. On note $F = \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id})$.

   (a) Trouver des bases respectives de F et G.

   (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

10. Montrer que F est l'unique droite de $\mathbb{R}^3$ stable par f.

11. Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 stable par f, distinct de G.

    (a) Déterminer la dimension de l'intersection $P \cap G$.

    (b) En déduire tous les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

12. Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

III. Une application

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, \ldots, e_5)$ est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Montrer que f est nilpotent.

14. Déterminer (sans calcul) une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

15. Déterminer un vecteur x_1 de $\mathbb{R}^5$ tel que la famille $\{f^k(x_1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f^2)$ puis de $\mathrm{Im}(f^3)$.

16. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ commutant avec f.

    (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$ sont stables par u.

    (b) En exploitant la question précédente, donner la forme de la matrice de u dans $\mathcal{B}_c$.

17. En déduire le commutant de f, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5) \mid u \circ f = f \circ u\}$. On précisera sa dimension.

IV - Quelques exemples plus généraux

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

18. Pour cette question uniquement, on suppose que f est non nul et non injectif.
    (a) Montrer qu'il existe au moins trois sous-espaces vectoriels de E stables par f.
    (b) On suppose désormais que n est impair. Montrer qu'il existe au moins quatre sous-espaces vectoriels de E stables par f.
19. Donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui admet exactement trois sous-espaces stables.
20. Dans cette question uniquement, on suppose que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.
    (a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
    (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
        i. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ vérifiant $i \neq j$. Exprimer $f(e_i + e_j)$ de deux manières différentes.
        ii. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.
        iii. Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme f ?

Correction du Devoir Surveillé 3 - partie CCP

Parties préliminaires :

1. Le seul sous-espace de E de dimension 0 est $\{0_E\}$ qui est stable par f puisque $f(0_E) = 0_E$ par linéarité de f. De même, le seul sous-espace de E de dimension $n = \dim(E)$ est E lui-même, et il est stable par f puisque l'on a $f(E) \subset E$ par définition d'un endomorphisme de E.
2. • Soit $F = \mathrm{Vect}(u)$ une droite de E stable par u. On a alors $f(u) \in \mathrm{Vect}(u)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Puisque F est de dimension 1, le vecteur u ne peut pas être nul, c'est donc un vecteur propre de f.
   • Réciproquement, soit u un vecteur propre de f. On note λ la valeur propre à laquelle est associé u. Par définition, $u \neq 0_E$, donc l'ensemble $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une droite de E. Soit $x \in F$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha u$. Par linéarité de f, il vient alors $f(x) = \alpha f(u) = \alpha\lambda u \in \mathrm{Vect}(u) = F$ ce qui démontre que F est stable par f.

I. Un cas particulier :

3. Le polynôme caractéristique de f est donné par

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -2 \\ 3 & X-2 & -2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X+1 & 0 \\ 3 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)(X-2)$$

   en développant par rapport à la dernière ligne. Ainsi, le spectre de f est $\mathrm{Sp}(f) = \{-1; 1; 2\}$. Puisque toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ est de multiplicité 1 et que l'on dispose de l'encadrement $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda = 1$, les sous-espaces propres de f sont tous de dimension 1. Pour les déterminer, il suffit donc juste de déterminer un vecteur non nul leur appartenant. D'après la matrice A (les coordonnées de $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $A.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$), on remarque que $f(e_2) = 2e_2$ d'où $E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_2)$. De même, $f(e_1 + e_2) = -(e_1 + e_2)$ d'où $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ et $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ d'où $E_1(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.
4. Puisque f admet 3 valeurs propres distinctes et $\dim(E) = 3$, f est diagonalisable (on peut aussi utiliser le fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $\dim E$, etc...)
5. D'après la question préliminaire, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace de E de dimension 1 stable par f, alors u est un vecteur propre de f, associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Ainsi, $u \in E_\lambda(f)$ et par suite $F \subset E_\lambda(f)$ (par stabilité par combinaisons linéaires). Par égalité des dimensions, il vient alors $F = E_\lambda(f)$. Réciproquement, les sous-espaces propres de f sont bien stables par f (toujours par la question 2). Finalement, les droites de E stables par f sont exactement $E_{-1}(f)$, $E_1(f)$ et $E_2(f)$.
6. (a) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ une base de E vérifiant (u_1, u_2) est une base de F. Puisque F est stable par f, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{K} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)(f_{|F}).$$

   (b) Puisque la matrice intervenant ci-dessous est triangulaire par blocs, on trouve

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X-a & -b & -c \\ -d & X-e & -f \\ 0 & 0 & X-g \end{vmatrix} = \chi_{f_{|F}}(X-g).$$

   Ainsi le polynôme caractéristique de $f_{|F}$, noté $\chi_{f_{|F}}$, divise χ_f.

(c) Puisque χ_F est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}[X]$, il en est de même de tout polynôme le divisant. Par conséquent, $f_{|_F}$ possède deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. De plus, le spectre de $f_{|_F}$ est inclus dans celui de f. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f_{|_F})$, notons $E_\lambda(f_{|_F})$ l'espace propre associé. Celui-ci est de dimension 1 (puisque la valeur propre est simple), de plus il est inclus dans $E_\lambda(f)$. En effet, pour tout $x \in E_\lambda(f_{|_F})$, on a $x \in F$ et $f(x) = f_{|_F}(x) = \lambda x$. Par égalité des dimensions, il vient donc bien $E_\lambda(f_{|_F}) = E_\lambda(f)$.

(d) Notons $\mathrm{Sp}(f_{|_F}) = \{\alpha; \beta\}$. Puisque $f_{|_F}$ est un endomorphisme de F diagonalisable, F est égal à la somme directe des sous-espaces propres de $f_{|_F}$, ce qui donne par la question précédente

$$F = E_\alpha(f_{|_F}) \oplus E_\beta(f_{|_F}) = E_\alpha(f) \oplus E_\beta(f),$$

ainsi F est bien la somme directe de deux sous-espaces propres de f.

7. On vient de voir qu'un sous-espace vectoriel de E stable par f de dimension 2 est nécessairement la somme de deux sous-espaces propres de f. Réciproquement, soit $F = E_\alpha(f) \oplus E_\beta(f)$ avec $\alpha, \beta \in \mathrm{Sp}(f)$ $(\alpha \neq \beta)$. Puisque la somme est directe, $\dim(F) = \dim E_\alpha(f) + \dim E_\beta(f) = 2$. En outre, pour tout $x \in F$, il existe $y \in E_\alpha(f)$ et $z \in E_\beta(f)$ tels que $x = y + z$, ce qui entraîne $f(x) = f(y) + f(z) = \alpha y + \beta z \in F$ et démontre la stabilité de F par f. Avec l'aide des questions 1 et 5, on conclut que l'ensemble des sous-espaces stables de f est :

$$\{\{0_E\}, E_{-1}(f), E_1(f), E_2(f), E_{-1}(f) \oplus E_1(f), E_{-1}(f) \oplus E_2(f), E_1(f) \oplus E_2(f), E\}.$$

II. Cas d'un endomorphisme non diagonalisable :

8. (a) En sommant toutes les colonnes dans la première, puis en utilisant les propriétés de multilinéarité du déterminants, il vient :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -1 \\ -1 & X-1 & -2 \\ -2 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & X-1 & -2 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = (X-4)(X^2+X+1)$$

en ayant effectué les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et développé par rapport à la première colonne. Le discriminant de X^2+X+1 étant strictement négatif, χ_f est factorisé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) Puisque χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$, f ne peut pas être diagonalisable.

9. (a) • F correspond à l'espace propre de f associé à la valeur propre 4. Puisque celle-ci est de multiplicité 1, F est de dimension 1. De plus, on remarque que la somme des colonnes de M est égale à $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ce qui montre que le vecteur $(1,1,1)$ appartient à F, d'où $F = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$. Ainsi, une base de F est $\{(1,1,1)\}$.

• Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in F \iff (M^2 + M + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

Ainsi, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$. L famille $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ est libre (composée de 2 vecteurs non colinéaires) et génératrice de G, c'est donc une base de G.

(b) On a déjà $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Montrons que l'intersection $F \cap G$ est égale à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$x \in F \cap G \iff \begin{cases} f(x) = 4x \\ f^2(x) + f(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = 4x \\ 21x = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \iff x = 0_{\mathbb{R}^3}$$

ce qui prouve que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et démontre que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ($F \oplus G = \mathbb{R}^3$).

10. On vient de voir que F est une droite de $\mathbb{R}^3$ et celle-ci est stable par f car engendrée par un vecteur propre. Réciproquement, si D est une droite de $\mathbb{R}^3$ stable par f, alors elle est engendrée par un vecteur propre associé à la valeur propre 4, et par égalité des dimensions, il vient $F = D$.

11. Soit P un plan de $\mathbb{R}^2$ stable par f avec $P \neq G$.

(a) Tout d'abord, $P \cap G \subsetneq P$ (puisque $P \neq G$) d'où $\dim(P \cap G) < 2$. De plus, d'après la formule de Grassman,

$$\dim(P \cap G) = \dim P + \dim G - \dim(P + G) = 4 - \dim(P + G) \geq 4 - 3 = 1$$

car $P + G \subset \mathbb{R}^3$ donc $\dim(P + G) \leq 3$. Ainsi, $P \cap G$ est de dimension 1.

(b) Soit $x \in G$, alors $(f^2 + f + \mathrm{Id})(f(x)) = f(f^2 + f + \mathrm{Id}(x)) = f(0_E) = 0_E$ puisque f commute avec $f^2 + f + \mathrm{Id}$. L'espace G est donc stable par f. Puisque P est lui-aussi stable par f, l'intersection $P \cap G$ est stable par f de dimension 1. Par la question 10, $P \cap G = F$ ce qui est absurde car $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par suite, G est l'unique plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f.

12. D'après les questions 1, 10 et 11b (et puisqu'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ est de dimension inférieure ou égale à 3), l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f est :

$$\{\{0_E\}, F, G, \mathbb{R}^3\}.$$

III. Une application :

13. On calcule les puissances successives de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } N^4 = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}$$

ce qui démontre que f est nilpotente d'indice de nilpotence 4.

14. Les deux premières colonnes de N sont nulles et les trois dernières étagées, donc $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(A) = 3$. De plus, puisque $\mathcal{B}_c$ est une base de $\mathbb{R}^5$,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_5)) = \mathrm{Vect}(0, 0, e_2, e_3, e_4) = \mathrm{Vect}(e_{2,3}, e_4)$$

ce qui démontre que la famille (e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathrm{Im}(f)$. D'après le théorème du rang, $\dim Ker(f) = 5 - \mathrm{rang}(f) = 2$, or les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent au noyau de f (puisque leur image par f est nulle) et forment une famille libre. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est (e_2, e_3).

15. On peut remarquer que $f(e_4) = e_3$, $f^3(e_4) = e_2$ et $f^k(e_4) = 0_{\mathbb{R}^5}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, ce qui entraîne que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f^k(e_4) \mid k \in \mathbb{N}\}$. On a de plus $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}(f(e_4), f^2(e_4), f^3(e_4)) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ et $\mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Vect}(e_2)$. Les familles génératrices qui interviennent sont des familles libres donc les bases voulues.

16. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ tel que $f \circ u = u \circ f$.

(a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(u(x)) = u(f(x)) = u(0_{\mathbb{R}^5}) = 0_{\mathbb{R}^5}$ puisque $u \circ f = f \circ u$ et par linéarité de u. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par u. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathrm{Im}(f^k)$. Par définition de l'image, il existe $x \in \mathbb{R}^5$ tel que $y = f^k(x)$. Par suite, $u(y) = u(f^k(x)) = f^k(u(x))$ (car u et f commutent), avec $x' = u(x) \in \mathbb{R}^5$, ce qui démontre que $u(y) \in \mathrm{Im}(f^k)$ et prouve la stabilité de $\mathrm{Im}(f^k)$ par u.

(b) On a vu que $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^3)$ sont stables par u, or

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2), \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4), \quad \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Vect}(e_2).$$

Comme $e_2 \in \mathrm{Im}(f^3)$, $u(e_2) \in \mathrm{Im}(f^3)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_2) = ae_2$. De même, il existe $b, c, d, e, f, \in \mathbb{R}$ tels que $u(e_3) = be_2 + ce_3$, $u(e_4) = de_2 + ee_3 + fe_4$ et $u(e_1) = ge_1 + he_2$. Ainsi, la matrice de u dans $\mathcal{B}_c$ est de la forme

$$U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & x \\ h & a & b & d & y \\ 0 & 0 & c & e & z \\ 0 & 0 & 0 & f & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

avec $x, y, z, t, v \in \mathbb{R}$.

17. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ commutant avec f. Alors en particulier

$$\begin{aligned}
UN = NU \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & d \\ 0 & 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e & z \\ 0 & 0 & 0 & f & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} a = c = f = v \\ b = e = t \\ d = z \end{cases} \\
&\iff \quad U = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 & x \\ h & a & b & d & y \\ 0 & 0 & a & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\
&\iff \quad u = af_1 + bf_2 + df_3 + gf_4 + hf_5 + xf_6 + yf_7
\end{aligned}$$

où $(f_i)_{i \in [\![1;7]\!]}$ désignent les endomorphismes de $\mathbb{R}^5$ dont les matrices dans la base $\mathcal{B}_c$ sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le commutant de f est inclus dans $\mathrm{Vect}\{f_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$. En remontant les équivalences ci-dessus, on remarque réciproquement que ces endomorphismes commutent avec f, ainsi

$$\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}\{f_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}.$$

La famille $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est par ailleurs libre : si l'on prend une combinaison linéaire nulle de ces éléments, tous les coefficients doivent eux-même être nuls (provient de l'égalité matricielle qui apparaît ci-dessus). Ainsi c'est une base de $\mathcal{C}(f)$ ce qui démontre que le commutant de f est de dimension 7.

IV. Quelques exemples plus généraux :

18. On suppose dans cette question f non nul et non injectif.
    (a) Le noyau de f est stable par f et non réduit à $\{0_E\}$ puisque f n'est pas injectif. De plus, f n'est pas nul donc son noyau n'est pas l'espace tout entier. D'après la question 1, il existe au moins trois sous-espaces vectoriels de E stable par f, à savoir $\{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
    (b) On suppose désormais $n = \dim E$ impair. On a déjà vu que $\mathrm{Im}(f)$ est aussi stable par f. Puisque f n'est pas nul, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f) < n$ ce qui montre que $\mathrm{Im}(f) \neq E$. Enfin, puisque n est impair, il n'est pas possible d'avoir $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ sinon on obtient $n = 2\,\mathrm{rang}(f)$ ce qui est contradictoire. Il existe donc au moins 4 sous-espaces de E stables par f : $\{0_E\}, \mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ et E.
19. Puisque l'on sait qu'une droite de $\mathbb{R}^2$ est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f, on va chercher un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant qu'une seule valeur propre. Celle-ci sera donc nécessairement de multiplicité 2 (les valeurs propres sont les racines du polynômes caractéristiques qui est de degré 2). De plus, si f est diagonalisable, alors f sera une homothétie et laissera stable n'importe quelle droite de $\mathbb{R}^2$. On cherche donc un endomorphisme non diagonalisable. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le spectre de f est égal à $\{1\}$ et l'unique sous-espace propre de f est $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,0)\}$. On montre comme dans la partie II qu'une droite stable par f est nécessairement égale à $E_1(f)$. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ stables par f sont donc : $\{(0,0)\}$, $\mathrm{Vect}\{(1,0)\}$ et $\mathbb{R}^2$.
20. On suppose que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.
    (a) Soit $x \in E$. L'ensemble $\mathrm{Vect}(x)$ est un sous-espace vectoriel de E donc stable par f. Ainsi, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}(x)$ donc il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
    (b) i. Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$. D'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i+e_j) = \lambda(e_i + e_j)$. De même, il existe $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ et $f(e_j) = \lambda_j e_j$. Par linéarité de f, on a alors $f(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$.
    ii. Puisque la famille (e_i, e_j) est libre (car extraite d'une base), l'égalité $\lambda(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$ équivaut à $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$. Ceci étant valable pour tous $i \neq j$, on a bien prouvé l'existence d'un scalaire λ vérifiant $f(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
    iii. Soit $x \in E$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1} x_i e_i$. Alors
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \lambda x$$
ce qui démontre que $f = \lambda\,\mathrm{Id}$. (On aurait simplement pu dire qu'un endomorphisme est entièrement déterminé par l'image d'une base donc $f = \lambda\,\mathrm{Id}$.)