Devoir numéro 3 – Math IV

Mardi 8 avril — Durée : 1h30

Partie Algèbre
Correction

Exercice 1. Soit E un espace euclidien. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E. Montrer que deux vecteurs propres de u associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Solution. *Soient v_1 et v_2 deux vecteurs de u associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On calcule d'un côté*

$$\langle u(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle,$$

et d'un autre côté, puisque u est auto-adjoint, on a

$$\langle u(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, u(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Ainsi, on a

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

et finalement $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Donc v_1 et v_2 sont orthogonaux.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

   Solution. *Considérons $\mathbb{R}^3$ munit du produit scalaire classique. Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la matrice A. Puisque la matrice A est symétrique, u est auto-adjoint et donc il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale, disons D. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. On a donc $P^{-1}AP = D$. De plus, P est orthogonale puisque la base canonique et la base $\mathcal{B}$ sont orthonormées.*

2. Calculer une base et la dimension du noyau de la matrice $A - \mathrm{I}_2$.
   En déduire que 1 est valeur propre de A.

   Solution. *Le vecteur ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ est dans le noyau de $A - \mathrm{I}_2$ si et seulement si*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_1 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_3 = 0. \end{cases}$$

   Après calcul, on trouve que ce système est équivalent à l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Donc le noyau de $A - \mathrm{I}_2$ est de dimension 2 et admet pour base, par exemple, la famille $({}^t(1,0,-1), {}^t(0,1,-2))$. Puisque ce noyau est de dimension 2, il suit que 1 est valeur propre de A de multiplicité 2.

3. Déterminer la deuxième valeur propre de A.
   Calculer une base et la dimension du sous-espace propre correspondant.

   Solution. *La trace de la matrice A est 9. Puisque 1 est valeur propre de multiplicité 2, on voit que la deuxième propre est 7. On calcule le sous-espace propre correspondant. Le vecteur ${}^t\left(x_1, x_2, x_3\right)$ est vecteur propre de valeur propre 7 si et seulement si*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7x_1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7x_2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7x_3. \end{cases}$$

   Après calcul, on trouve que ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

   et donc ce sous-espace propre est de dimension 1 (comme il se doit) et admet pour base $({}^t(1, 2, 1))$.

4. En déduire une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

   Solution. *On pose $a_1 = {}^t(1, 0, -1)$, $a_2 = {}^t(0, 1, -2)$ et $a_3 = {}^t(1, 2, 1)$ les vecteurs propres calculés aux questions précédentes. Par le procédé de Gram-Schmidt, on calcule*

$$a_2' = a_2 - \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle} a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   tel que (a_1, a_2') est une base orthogonale du sous-espace propre associée à 1. On pose finalement

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = {}^t(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), \\ e_2 &= \frac{1}{\|a_2'\|} a_2' = {}^t(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \\ e_3 &= \frac{1}{\|a_3\|} a_3 = {}^t(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

   Alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice de u est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   La matrice P est la matrice de changement de base de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) et donc

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit f une rotation du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe une base (u, v) sur laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à déterminer les vecteurs u et v et l'angle de f.

1. Donner, sans démonstration, l'expression de la matrice de la rotation d'angle θ dans une base orthonormée. Quelle est sa trace ?

   Solution. *La rotation d'angle θ a pour matrice dans une base orthonormée*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   De plus, la trace de R_θ est $2\cos\theta$.

2. Justifier pourquoi la trace d'un endomorphisme est indépendante du choix de la base. En déduire que l'angle de la rotation f est $\pm\pi/3 \pmod{2\pi}$.

   Solution. *La trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres (avec multiplicité) et donc est indépendant du choix de la base. On peut aussi utiliser la formule $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ pour deux matrices carrées M et N. Si M_1 et M_2 sont deux matrices associées à l'endomorphisme dans deux bases distinctes, alors il existe une matrice inversible P telle que $M_2 = P^{-1}M_1P$ et par la formule ci-dessus avec $M = P^{-1}$ et $N = M_1P$, on obtient bien $\mathrm{Tr}(M_2) = \mathrm{Tr}(M_1)$.*
   La trace de la matrice A est 1 donc, par la question précédente, il suit que $2\cos\theta = 1$ où θ est l'angle de f, d'où $\cos\theta = 1/2$ et $\theta = \pm\pi/3 \pmod{2\pi}$.

3. Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\|f(a)\| = \|a\|$ et $\langle f(a), f(b)\rangle = \langle a, b\rangle$.

   Solution. *Puisque f est une rotation, f est un endomorphisme orthogonal et donc on a bien $\|f(a)\| = \|a\|$ et $\langle f(a), f(b)\rangle = \langle a, b\rangle$.*

4. On pose $U = \|u\|^2$, $V = \|v\|^2$ et $S = \langle u, v\rangle$. Montrer qu'on a

$$\begin{cases} U = 4U + 9V + 12S, \\ V = U + V + 2S, \\ S = -2U - 3V - 5S. \end{cases}$$

   (Indication : calculer $\langle u, u\rangle$, $\langle v, v\rangle$ et $\langle u, v\rangle$ en utilisant la question précédente.)

   Solution. *On a*

$$\begin{aligned} U = \|u\|^2 = \|f(u)\|^2 = \langle f(u), f(u)\rangle &= \langle 2u+3v, 2u+3v\rangle \\ &= 4\langle u,u\rangle + 6\langle u,v\rangle + 6\langle v,u\rangle + 9\langle v,v\rangle \\ &= 4\langle u,u\rangle + 12\langle u,v\rangle + 9\langle v,v\rangle = 4U + 12S + 9V. \end{aligned}$$

   De même, on calcule

$$\begin{aligned} V = \|v\|^2 = \|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle &= \langle -u-v, -u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = U + 2S + V. \end{aligned}$$

   Et on trouve aussi finalement

$$\begin{aligned} S = \langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle &= \langle 2u+3v, -u-v\rangle \\ &= -2\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle - 3\langle v,u\rangle - 3\langle v,v\rangle \\ &= -2\langle u,u\rangle - 5\langle u,v\rangle - 3\langle v,v\rangle = -2U - 5S - 3V. \end{aligned}$$

On note (e_1, e_2) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose à présent que $u = e_1$.

5. En déduire qu'on a $v = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \pm 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. On choisit pour la suite $v = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

   <u>Solution.</u> *On a donc $U = 1$ et le système*

$$\begin{cases} 1 = 4 + 9V + 12S \\ V = 1 + V + 2S \\ S = -2 - 3V - 5S. \end{cases}$$

   On trouve la solution $S = -1/2$ et $V = 1/3$.
   On écrit $v = {}^t(x, y)$. On a $V = x^2 + y^2$ et $S = x$. Donc $x = -1/2$ et $y^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$, d'où $y = \pm 1/2\sqrt{3}$. Pour la suite, on prend $y = 1/2\sqrt{3}$.

6. Déterminer le signe de l'angle de la rotation f.

   <u>Solution.</u> *On a*

$$f(e_1) = 2e_1 + 3v = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

   D'un autre côté, on a $f(e_1) = {}^t(\cos\theta, \sin\theta)$. Donc l'angle de la rotation f est $\pi/3$.

7. Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?

   <u>Solution.</u> *Puisque la base canonique est une base orthonormée, la matrice de f sur cette base est donnée par $R_{\pi/3}$ et donc c'est la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$