

Année universitaire : ..... / .....

Diplôme : DS n°2

Epreuve : Algèbre

Date : .....

Nom (de jeune fille pour les femmes mariées) et prénoms : \_\_\_\_\_

Numéro de la carte d'étudiant : \_\_\_\_\_

Signature : \_\_\_\_\_

NOTE : .....

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0748858

Nombre d'intercalaires : .....

### Exercice 4.]

1. La matrice  $A$  a deux colonnes identiques; elle est donc non inversible, car  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

En conséquence,  $|\det(A)| = 0$

Par ailleurs,  $A$  étant non inversible, son noyau n'est pas réduit à  $\{0\}$  et est au moins de dimension égale à 1. Par théorème du rang, son rang est au plus  $4 - 1 = 3$ . J'ai les trois dernières colonnes de  $A$  sont échelonnées, donc son rang est au moins 3. D'où égalité :  $|\text{rg}(A)| = 3$

Enfin, comme  $\ker(A) \neq \{0\}$ , tout vecteur non nul du noyau de  $A$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0 :  $0 \in \text{Sp}(A)$

2. On trouve  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ce qui donne un vecteur propre  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$  associé respectivement à 8 et 4 :  $\{4, 8\} \subset \text{Sp}(A)$

3. Étant donnée une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , si  $\chi_M = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  avec  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  est son polynôme caractéristique, alors

$$a_n = 1, \quad a_{n-1} = -\text{tr}(M), \quad a_0 = \det(M)(-1)^n$$

Par ailleurs, les relations coefficients-racines donnent

$$\left| \begin{array}{cc} a_{n-1} = -\sum_{\lambda \text{ racine de } \chi_M} \lambda & a_0 = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ racine de } \chi_M} \lambda \end{array} \right|$$

(où les racines sont comptées avec multiplicité). Les racines de  $\chi_M$  n'étant autres que les valeurs propres de  $M$ .

$$\text{tr}(M) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \lambda, \quad \det(M) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \lambda$$

(toujours avec les multiplicités algébriques).

Ici, on dispose de trois valeurs propres sur 4, de somme  $0 + 8 + 4 = 12$ , tandis que  $\text{tr}(M) = 12$ .

La dernière valeur propre est donc  $12 - 12 = 0$ .

$$\text{Finalement, } \left| \begin{array}{c} \text{Sp}(A) = \{0, 4, 8\} \\ \text{mult } 2 \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{mult } 1 \quad \text{mult } 1 \quad \text{mult } 1 \end{array} \right|$$

4. D'après la question 3, on doit avoir  $\chi_M = X^2(X-4)(X-8)$ . Vérifions-le :

$$\chi_M = \det(XI_4 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} X-4^{\oplus} & -4^{\ominus} & 0^{\oplus} & 0^{\ominus} \\ -2 & X-2 & -4 & 0^{\oplus} \\ -1 & -1 & X-2 & -4^{\ominus} \\ -1 & -1 & -2 & X-4^{\oplus} \end{vmatrix}$$

$$= -(-4) \times \begin{vmatrix} X-4^{\oplus} & -4^{\ominus} & 0^{\oplus} \\ -2 & X-2 & -4^{\ominus} \\ -1 & -1 & -2^{\oplus} \end{vmatrix} + (X-4) \times \begin{vmatrix} X-4^{\oplus} & -4^{\ominus} & 0^{\oplus} \\ -2 & X-2 & -4 \\ -1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$= 4 \left[ -(-4) \times \begin{vmatrix} X-4 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} X-4 & -4 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} \right] + (X-4) \left[ (X-4) \begin{vmatrix} X-2 & -4 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 4 \left[ 4(-(X-4) - (-1)(-4)) - 2((X-4)(X-2) - (-2)(-4)) \right] + (X-4) \left[ (X-4)((X-2)^2 - (-4)(-1)) + 4(-2(X-2) - (-1)(-4)) \right]$$

$$= 16(-X) - 8(X^2 - 6X) + (X-4)^2(X^2 - 4X) + 4(X-4)(-2X)$$

$$= X^4 - 12X^3 + 32X^2$$

$$= X^2(X^2 - 12X + 32)$$

soit

$$\chi_M = X^2(X-4)(X-8), \text{ comme attendu.}$$

5. Déterminons d'abord les dimensions des espaces propres de  $A$  grâce au théorème du rang:

- par 0:  $A$  est de rang 3 (question 1), donc  $\ker(A)$  est de dimension 1

- par 4: on a  $\dim \ker(A - 4I_4) \geq 1$  et

$$\text{rg}(A - 4I_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \geq 3 \text{ car le mineur}$$

encadré est non nul, donc  $\ker(A - 4I_4)$  est de dimension 1.

- par 8: même raisonnement sur

$$A - 8I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \text{ donc } \ker(A - 8I_4)$$

est de dimension 1.

Les espaces propres de  $A$  sont donc des droites; il suffit donc d'en exhiber un vecteur non nul (i.e. un vecteur propre). par on a en avoir une base. On en a trouvé aux questions 1 et 2; les vecteurs suivants forment chacun une base de  $E_\lambda(A)$ :  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour  $\lambda=0$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour  $\lambda=8$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  pour  $\lambda=4$ .

Revenant à  $u$ ,

$$\{E_{11} - E_{12}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est base de } \ker(u)$$

$$\{E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est base de } \ker(u - 8\text{id})$$

$$\{2E_{11} - E_{21} - E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est base de } \ker(u - 4\text{id})$$

## Exercice 5

1. On calcule

$$u(E_1) = E_1 \quad \text{donc} \quad E_1 \in \ker(u - \text{id})$$

$$u(E_2) = 2E_2 \quad \text{donc} \quad E_2 \in \ker(u - 2\text{id}), \text{ a fortiori} \\ E_2 \in \ker((u - 2\text{id})^2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(E_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = E_2 + 2E_3 \\ u^2(E_3) &= u(E_2) + 2u(E_3) = 4E_2 + 4E_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ d'où } u^2(E_3) - 4u(E_3) + 4E_3 = 0 \\ \text{et } E_3 \in \ker((u - 2\text{id})^2)$$

cellement dit,

$$\begin{cases} \text{Vect}\{E_1\} \subseteq \ker(u - \text{id}) \\ \text{Vect}\{E_2\} \subseteq \ker(u - 2\text{id}) \\ \text{Vect}\{E_2, E_3\} \subseteq \ker((u - 2\text{id})^2) \end{cases}$$

On va conclure en montrant l'égalité des dimensions de part et d'autre.

- $\text{Vect}\{E_1\}$  est de dimension 1
- $\text{Vect}\{E_2\}$  " 1
- $\text{Vect}\{E_2, E_3\}$  " 2

car  $(E_1, E_2, E_3)$  est libre (on le montrera question 2)

- dans la base canonique  $\mathcal{B}$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u - \text{id}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de rang au moins 2}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u - 2\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang au moins 2}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((u - 2\text{id})^2) = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 1 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ est de rang au moins 1}$$

grâce aux mineurs non nuls encadrés. Par théorème du rang, on obtient

$$\dim \ker(u - \text{id}) \leq 1$$

$$\dim \ker(u - 2\text{id}) \leq 1$$

$$\dim \ker((u - 2\text{id})^2) \leq 2$$

(avec en fait égalité)

D'où les égalités:

$$\begin{aligned} \ker(u - \text{id}) &= \text{Vect}\{\varepsilon_1\} \\ \ker(u - 2\text{id}) &= \text{Vect}\{\varepsilon_1\} \\ \ker((u - 2\text{id})^2) &= \text{Vect}\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} \end{aligned}$$

2.  $B$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  car son déterminant est non nul:

$$\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

et, par les calculs de la question 1.

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On calcule  $\chi_u$  dans la base  $B$  (dans la base canonique, ce serait bien plus pénible):

$$\chi_u = \det(XI_3 - \text{Mat}_B(u)) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = \boxed{(X-2)^2(X-1)}$$

En particulier,  $\text{Sp}(u) = \{1, 2\}$   
mult. 1 mult. 2

4a) On procède par analyse-synthèse.

[A] Soit  $D$  une droite stable par  $u$ . Soit  $x \in D \setminus \{0\}$ ;  $u(x) \in D$  car  $D$  est stable par  $u$ , et  $\{x\}$  est une base de  $D$ . Donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid u(x) = \lambda x$  c'est-à-dire dit,  $x$  est un vecteur propre de  $u$ , et  $D \subseteq \ker(u - \lambda \text{id})$ . Dans notre cas,  $u$  n'a que deux valeurs propres, 1 et 2. Donc  $D \subseteq \ker(u - \text{id})$  ou  $D \subseteq \ker(u - 2\text{id})$ ; et, ayant égalité des dimensions,  $D = \ker(u - \text{id})$  ou  $D = \ker(u - 2\text{id})$ .

[S]  $\ker(u - \text{id})$  et  $\ker(u - 2\text{id})$  sont des droites (cf. question 1) et sont stables par  $u$  (en tant que

noyaux de polynômes en  $u$ ).

Conclusion Les droites stables de  $u$  sont exactement  $\ker(u - \text{id}) = \text{Vect}\{\varepsilon_1\}$  et  $\ker(u - 2\text{id}) = \text{Vect}\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ .

4b) Rappelons que

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ qu'on peut diviser en blocs}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \text{ et } \left( \begin{array}{c|cc} * & 0 & 0 \\ \hline * & 2 & 1 \\ * & 0 & 2 \end{array} \right). \text{ Ces structures}$$

donnent deux espaces stables:

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} &= \ker(u - \text{id}) + \ker(u - 2\text{id}) \\ \text{Vect}\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} &= \ker((u - 2\text{id})^2) \end{aligned}$$

qui sont bien des plans, et stables par  $u$  (en tant que noyaux de polynômes en  $u$  ou somme de tels noyaux).

[Il serait possible de montrer que ce sont là les seuls plans stables, en utilisant la méthode de l'exercice 8 du TD 3: on introduit  $p$  et  $q$  les projecteurs associés à la décomposition  $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker((u - 2\text{id})^2)$ , et on montre que tout sous-espace  $S$  stable par  $u$  vérifie  $S = p(S) \oplus q(S)$ ; en raisonnant sur les dimensions possibles de  $p(S)$  et  $q(S)$ , on montrerait alors que, pour que  $S$  soit un plan, ou bien  $p(S) = \{0\}$  et  $S = q(S) = \ker((u - 2\text{id})^2)$ ; ou bien  $p(S)$  et  $q(S)$  sont tous deux des droites stables, d'où  $S = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})$  d'après la question 4a.]