DS du 11 mars 2025

Exercice 1. Soit $\mathbb{C}^4$ muni du produit scalaire hermitien canonique, et H le sous-espace de $\mathbb{C}^4$ défini par

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4, x + y + iz + 2t = 0\}.$$

1. Déterminer la dimension de H .
2. Déterminer une base orthonormée de H .
3. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$.
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur H dans la base canonique.
5. Soit $a = (1, 1, i, i) \in \mathbb{C}^4$. Calculer la distance de a à H .

Exercice 2. On considère B l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on note $F = \text{vect}(\sin, \cos)$ le sous-espace vectoriel de B engendré par les fonctions sinus et cosinus.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in B$, on pose

$$N_\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} |f(x)| dx.$$

1. Montrer l'équivalence

$$(\forall f \in B, N_\alpha(f) \in \mathbb{R}) \iff (\alpha > 0).$$

2. Montrer que pour $\alpha > 0$, N_α est une norme sur B .
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto e^{-nx^2}$. Justifier que $f_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle pour la norme N_1 .
5. En déduire que les normes N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes dans B .
6. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge vers une fonction g pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x)$.
7. En déduire que F est un fermé de B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
8. La restriction de l'application N_1 au sous-espace vectoriel F est encore une norme sur F . De même, la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à F est encore une norme sur F . Les normes N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ sur F sont-elles équivalentes ?
9. On désigne par $\tilde{1}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1. Soient $r > 0$ et $h \in B$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la fonction $h + a\tilde{1}$ appartienne à la boule ouverte de centre h et de rayon r dans B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
10. En déduire que l'intérieur de F dans B pour la norme infinie est vide.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour un sous-espace vectoriel F de E , on note p_F la projection orthogonale sur F .

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $F = \{x \in E, \|x\| = \|p_F(x)\|\}$.
2. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $p_F \circ p_G = p_H$. Montrer que $F \cap G = H$.