Université Claude Bernard - Lyon 1
Math IV - PMI

Semestre de Printemps 2012-2013
Durée: 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants.

PARTIE A

Exercice I : Théorème de convergence dominée
En utilisant le théorème de convergence dominée, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}dx.$$

Exercice II : Séries de fonctions

1. Pour quelles valeurs de $x\in\mathbb{R}$, la série de terme général $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$, est-elle convergente ?
2. On pose : $\forall x\geq 0,\quad f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.
   Montrer que f est continue.
3. Vérifier que : $\forall t\in\mathbb{R},\quad \forall k\in\mathbb{N},\quad (1-t)\displaystyle\sum_{n=0}^{k}t^n=1-t^{k+1}$.
   En déduire que : $\forall t\in[0,1[,\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}e^{-nx}$ converge pour tout $x>0$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}$.
5. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
6. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_n'$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_n''$ sont uniformément convergentes sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>0$.
7. En déduire que :
   $$\forall x>0,\quad f''(x)+f(x)=\frac{1}{e^x-1}.$$

PARTIE B

Exercice III
Dans cet exercice on note p_H la projection orthogonale sur un sous-espace H d'un espace euclidien.

1) Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$, et soit e et f deux vecteurs non nuls de E tels que $e \perp f$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par e et f.
Montrer que pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \frac{\langle x, e \rangle}{\langle e, e \rangle} e + \frac{\langle x, f \rangle}{\langle f, f \rangle} f.$$

2) Dans cette question $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On note :

$$a = (1, 2, -1, 2) \qquad \text{et} \qquad c = (1, 7, 5, 5)$$

puis F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par a et c et G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini comme :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - z + 2t = 0 \text{ et } x + 7y + 5z + 5t = 0\}.$$

a) Rappeler la définition de $F^\perp$.

b) Montrer que $G = F^\perp$.

c) En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, déterminer un vecteur non nul $b \in F$ tel que $a \perp b$.

d) On note $d = (30, 30, 30, 30)$. Expliciter $p_F(d)$ puis $p_G(d)$.

Exercice IV
Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel réel (parfois noté $\mathbf{R}_2[X]$) des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On note Q la forme quadratique sur E dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, pour toute fonction continue à valeurs positives w de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}^+$ on définit une application q_w de E vers $\mathbf{R}$ par la formule :

$$q_w(P) = \int_{-1}^{1} [P(t)]^2 w(t)\, dt.$$

1) Montrer que Q est une forme quadratique définie positive. Il est vivement recommandé d'utiliser la réduction en carrés dite de Gauß.

2) Soit w une fonction continue à valeurs positives de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}^+$. Dans cette question, on suppose en outre que w n'est pas la fonction nulle.

a) Montrer que q_w est une forme quadratique sur E.

b) Montrer qu'il existe deux réels a et b avec

$$-1 \leq a < b \leq 1$$

tels que pour tout $t \in [a, b]$, $w(t)$ soit strictement positif.

c) Montrer que q_w est définie positive sur E.

3) Montrer qu'aucune des formes quadratiques q_w n'est égale à Q. (Indication : supposez $Q = q_w$. En fixant votre regard sur le coefficient central de A, qui vaut 2 et le coefficient sud-ouest, qui vaut 1, vous arriverez peut-être à voir que quelque chose ne marche pas comme ça devrait).

Corrigé du DS2

PARTIE A

Exercice 1:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,+\infty[$, posons $f_n(x) = \dfrac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}$.

* $\forall x \in [0,+\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, qui converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

* $\forall x \in [0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{e}{1+x^2}$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, posons $g(x) = \dfrac{e}{1+x^2}$.

Alors, g est continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives et intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

$\forall M > 0$, $\displaystyle\int_0^M g(x)\,dx = e\,\big[\arctan(x)\big]_0^M = e \arctan(M) \xrightarrow[M \to +\infty]{} \frac{e\pi}{2}$.

* D'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2:

1) * $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0$, $|f_n(x)| = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors par comparaison de séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n|$ est une série simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}_+$.

* $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x<0,\ f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}=e^{-nx}(1+n^2)^{-1}=e^{-nx}e^{-\ln(1+n^2)}$

$$= e^{-nx-\ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]} = e^{-nx-2\ln n-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= e^{n\left[-x-2\frac{\ln n}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]}$$

$\Rightarrow \forall x<0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx}=+\infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} f_n$ diverge grossièrement sur $\mathbb{R}_-^*$.

2) Comme $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, on peut définir :

$$\forall x\geq 0,\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

* $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}=\dfrac{1}{1+n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes positifs

$\sum\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)|$ converge aussi.

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur tout compact de $\mathbb{R}_+$).

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3) Soient $t\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$, alors

$$(1-t)\sum_{n=0}^{k}t^n=\sum_{n=0}^{k}t^n-\sum_{n=0}^{k}t^{n+1}=\sum_{n=0}^{k}t^n-\sum_{n=1}^{k+1}t^n=1-t^{k+1}.$$

$\Rightarrow \forall t\in[0,1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}t^n=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1-t^{k+1}}{1-t}=\dfrac{1}{1-t}.$

4) $\forall x>0$, $\sum_{n\geq 1} (e^{-x})^n$ est une série géométrique de raison $e^{-x}\in[0,1[$, donc convergente

et $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^{x}-1}$.

5) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x>0$, $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq e^{-nx}$

$\Rightarrow \forall x>0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{e^{x}-1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6) $\forall n\geq 1$, f_n est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n'(x) = -\frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$, $f_n''(x) = \frac{n^2 e^{-nx}}{1+n^2}$.

Soit $a>0$, $\forall n\geq 1$, $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)| \leq e^{-na}$ et $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n''(x)| \leq e^{-na}$.

Comme $\sum_{n\geq 1} e^{-na}$ est une série géométrique de raison $e^{-a}\in[0,1[$, donc convergente,

alors $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)|$ et $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n''(x)|$ sont convergentes (par comparaison de séries à termes positifs).

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n'$ et $\sum_{n\geq 1} f_n''$ sont normalement (donc uniformément) convergentes sur $[a,+\infty[$

7) $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $a>0$.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge simplement sur } [a,+\infty[\\ \sum_{n\geq 1} f_n' \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x\in[a,+\infty[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n\geq 1} f_n' \text{ converge simplement sur } [a,+\infty[\\ \sum_{n\geq 1} f_n'' \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x\in[a,+\infty[,\ f''(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x)$$

Ainsi, $\forall x>0$, $f''(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n''(x) + f_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^{x}-1}$.

Exercice III

1) Seront acceptées les deux solutions suivantes, que je me borne à esquisser sur ce corrigé :

* on fixe $x \in E$ et on note y le vecteur $\dfrac{\langle x,e\rangle}{\langle e,e\rangle}e + \dfrac{\langle x,f\rangle}{\langle f,f\rangle}f$. Il est évident que $y \in F$ puis on vérifie sans mal que $x - y$ est orthogonal à F (parce qu'il est orthogonal à e et f donc à toutes leurs combinaisons linéaires).

* on se repose sur la formule du cours exprimant p_F à partir d'une base orthonormée de F (celle en haut de la page 3 du polycopié d'Alexei) et on l'applique à la base $(e/\|e\|, f/\|f\|)$.

2) a) C'est du cours.

b) On écrit qu'un vecteur est orthogonal à F signifie qu'il est orthogonal à toutes les combinaisons linéaires de a et c. En une ligne de calculs, on constate que ça équivaut à être orthogonal à a et c. Enfin on constate que la définition de G en fait l'ensemble des vecteurs à la fois orthogonaux à a et c.

c) On doit déterminer un scalaire λ tel que le vecteur b défini comme $c + \lambda a$ soit orthogonal à a. On peut savoir par coeur la formule $\lambda = - < a, c > / < a, a >$ ou la retrouver en une ligne. Toujours est-il que $\lambda = -20/10 = -2$ puis $b = c - 2a = (-1, 3, 7, 1)$ - tout vecteur proportionnel à celui-ci, notamment son opposé, sera bien sûr accepté comme réponse valable à la question.

d) Pour $p_F(d)$, on applique méthodiquement la formule du 1) à $x = d$, $e = a$ et $f = b$. Pour $p_{F^\perp}(d)$ on écrit que c'est $d - p_F(d)$. Si je ne me suis pas planté on attend les résultats :

$$p_F(d) = 12a + 5b = (7, 39, 23, 29) \text{ et } p_{F^\perp}(d) = (23, -9, 7, 1).$$

Exercice IV

1) Soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, noté $P = a + bX + cX^2$. L'utilisation de la matrice A donne l'expression : $Q(P) = a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.
L'orthogonalisation de Gauß de cette expression donne $(a - b + c)^2 + b^2 + c^2$ forme sur laquelle on constate que la signature est $(3, 0)$ et donc que Q est définie positive.

2) a) (Je n'écris pas tous les détails). On pose pour deux polynômes P_1 et P_2 dans E :

$$b_w(P_1, P_2) = \int_{-1}^{1} P_1(t)P_2(t)w(t)\,dt$$

puis on vérifie que pour tout P, $q_w(P) = b_w(P, P)$, que b_w est symétrique et enfin que b_w est linéaire à gauche.

b) Il peut être confortable de remarquer d'abord que la restriction de w à $]-1, 1[$ n'est pas la fonction nulle : une fonction continue nulle sur $]-1, 1[$ est aussi nulle aux extrémités, par passage à la limite.
On peut donc prendre un $t_0 \in]-1, 1[$ tel que $0 < w(t_0)$. En appliquant la définition de "continuité" on produit alors un $\eta > 0$, qu'on peut supposer plus petit que $\mathrm{Min}(t_0 + 1, 1 - t_0)$ pour lequel pour tout t vérifiant $|t - t_0| \leq \eta$, on ait l'inégalité $|w(t) - w(t_0)| \leq w(t_0)/2$, ce qui entraîne $-w(t_0)/2 \leq w(t) - w(t_0)$ puis $w(t_0)/2 \leq w(t)$ et donc $0 < w(t)$. Il n'y a plus qu'à poser $a = t_0 - \eta$ et $b = t_0 + \eta$.

c) On vérifie sans mal que q_w est positive. Pour montrer qu'elle est définie, soit un P dans E tel que $q_w(P) = 0$. En écrivant l'encadrement :

$$0 \leq \int_a^b [P(t)]^2 w(t)\,dt \leq \int_{-1}^{1} [P(t)]^2 w(t)\,dt = 0$$

on conclut que $\displaystyle\int_a^b [P(t)]^2 w(t)\,dt = 0$.

Puisqu'il s'agit d'une intégrale de fonction continue positive et que $a < b$, c'est donc que la fonction intégrée est nulle sur $[a, b]$. Comme w ne s'annule pas sur cet intervalle, c'est donc que P est nul en tout point de celui-ci. Le polynôme P a donc une infinité de racines ; il est donc nul.

3) S'il existait un w tel que $q_w = Q$, on aurait alors $b_w(1, X^2) = 1$ (coefficient sud-ouest de A) et par ailleurs $b_w(X, X) = 2$ (coefficient central de A). Mais par ailleurs $b_w(1, X^2)$ et $b_w(X, X)$ sont tous deux égaux par définition à $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 w(t)\,dt$. Contradiction !