Correction du DS du 11 mars 2025

Exercice 1. Soit $\mathbb{C}^4$ muni du produit scalaire hermitien canonique, et H le sous-espace de $\mathbb{C}^4$ défini par

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4, x + y + iz + 2t = 0\}.$$

1. Déterminer la dimension de H .

On rappelle que dans la convention du cours, un produit scalaire hermitien est linéaire à droite :

$$\langle (1, 1, -i, 2), (x, y, z, t) \rangle = x + y + iz + 2t.$$

Le sous-espace H est donc l'orthogonal de $\text{vect}(1, 1, -i, 2)$, qui est un sous-espace de dimension 1. Comme $\dim H + \dim H^\perp = \dim \mathbb{C}^4$, on a donc $\dim H + 1 = 4$, et donc $\dim H = 3$.

-
2. Déterminer une base orthonormée de H .

On peut commencer par une représentation paramétrique de H , en voyant l'équation comme une contrainte qui donne la dernière coordonnée en fonction des trois premières :

$$H = \left\{ (x, y, z, -\frac{1}{2}(x + y + iz)), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Au passage, on retrouve le fait que H est de dimension 3. En choisissant $x = -y, z = 0$ on trouve le vecteur

$$u_1 = (1, -1, 0, 0),$$

puis en choisissant $x = y = 0, z = 1$, on trouve le vecteur

$$u_2 = (0, 0, i, \frac{1}{2}).$$

L'intérêt de ces choix est que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, ce qui va simplifier les calculs dans la suite. Ensuite on complète la famille $\{u_1, u_2\}$ en une base de H , en prenant un vecteur plus ou moins au hasard dans H , par exemple en choisissant $x = 1, y = 0, z = 1$, et on obtient

$$u_3 = (1, 0, i, 0).$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est clairement libre et comme c'est une famille de trois vecteurs dans H qui est de dimension 3, c'est donc une base de H .

On applique maintenant l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base. On obtient

$$v_1 = u_1, \quad e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0),$$

puis

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2, \quad e_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}(0, 0, i, \frac{1}{2}),$$

puis

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2, \quad e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3.$$

Calculs auxiliaires :

$$\langle v_1, u_3 \rangle = 1, \quad \langle v_2, u_3 \rangle = 1.$$

Donc

$$v_3 = u_3 - \frac{1}{2}v_1 - \frac{4}{5}v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i}{5}, \frac{-4}{10}\right),$$

si bien que

$$\|v_3\|^2 = \frac{7}{10},$$

et donc finalement

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \sqrt{\frac{10}{7}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i}{5}, \frac{-4}{10}\right).$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de H .

Remarque 1. Dans un cadre hermitien, avec un produit hermitien linéaire à droite comme dans le cours, on utilise pour Gram-Schmidt la formule

$$u'_2 = v_2 - (u_1, v_2)u_1, \tag{1}$$

de sorte que

$$(u'_2, u_1) = (v_2, u_1) - \overline{(u_1, v_2)}(u_1, u_1) = 0$$

si u_1 est unitaire. Noter qu'avec la formule

$$u'_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1, \tag{2}$$

on obtiendrait

$$(u'_2, u_1) = (v_2, u_1) - \overline{(v_2, u_1)} \neq 0.$$

Remarque 2. Dans beaucoup de copies, le point de départ était la base (u_1, u_2, u_3) de H avec

$$u_1 = (-1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (-i, 0, 1, 0), \quad u_3 = (-2, 0, 0, 1).$$

On a alors $\|u_1\|^2 = 2$, et on pose

$$v_1 = u_1, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0).$$

Gram-Schmidt :

$$v_2 = u_2 - \frac{(v_1, u_2)}{2}v_1.$$

Calcul :

$$(v_1, u_2) = i.$$

Donc

$$v_2 = u_2 - \frac{i}{2}v_1 = (-i/2, -i/2, 1, 0), \quad e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(-i/2, -i/2, 1, 0).$$

Enfin

$$v_3 = u_3 - \frac{1}{2}(v_1, u_3)v_1 - \frac{2}{3}(v_2, u_3)v_2.$$

Comme

$$(v_1, u_3) = 2, \quad (v_2, u_3) = -i$$

on trouve finalement

$$v_3 = u_3 - v_1 + \frac{2i}{3}v_2 = (-2/3, -2/3, 2i/3, 1), \quad e_3 = \frac{3}{7}(-2/3, -2/3, 2i/3, 1).$$

3. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$.

Comme $H = \text{vect}(1, 1, -i, 2)^\perp$, on a

$$H^\perp = \text{vect}(1, 1, -i, 2)^{\perp\perp} = \text{vect}(1, 1, -i, 2).$$

On calcule

$$\|(1, 1, -i, 2)\|^2 = 7.$$

Donc une base orthonormée de $H^\perp$ est $\{e_0\}$ avec

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -i, 2).$$

4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur H dans la base canonique.

On note p_H la projection orthogonale sur H dans $\mathbb{C}^4$. On peut partir de la formule de la projection orthogonale sur un sous-espace à partir d'une base orthonormée :

$$p_H(x) = (u_1, x)u_1 + (u_2, x)u_2 + (u_3, x)u_3, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{C}^4.$$

Mais il est plus simple d'utiliser la relation

$$\forall x \in \mathbb{C}^4, \quad x = p_H(x) + p_{H^\perp}(x), \quad (3)$$

en notant $p_{H^\perp}$ la projection orthogonale sur $H^\perp$ dans $\mathbb{C}^4$. Donc avec la notation $\{e_0\}$ de la question précédente pour une base orthonormée de $H^\perp$, on a

$$p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - (e_0, x)e_0. \quad (4)$$

On note $e'_0 = (1, 1, -i, 2)$, et $\mathcal{B} = (f_i)_{\{1 \leq i \leq 4\}}$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Calculs auxiliaires :

$$(e'_0, f_1) = 1, \quad (e'_0, f_2) = 1, \quad (e'_0, f_3) = i, \quad (e'_0, f_4) = 2.$$

Donc

$$p_H(f_1) = f_1 - \frac{1}{7}e'_0 = \frac{1}{7}(6, -1, i, -2),$$

$$p_H(f_2) = f_2 - \frac{1}{7}e'_0 = \frac{1}{7}(-1, 6, i, -2),$$

$$p_H(f_3) = f_3 - \frac{i}{7}e'_0 = \frac{1}{7}(-i, -i, 6, -2i),$$

$$p_H(f_4) = f_4 - \frac{2}{7}e'_0 = \frac{1}{7}(-2, -2, 2i, 3),$$

si bien que

$$M_{\mathcal{B}}(p_H) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -i & -2 \\ -1 & 6 & -i & -2 \\ i & i & 6 & 2i \\ -2 & -2 & -2i & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérification partielle : la matrice ci-dessus est à symétrie hermitienne, ce qui valide en partie les calculs précédents. En effet, une projection orthogonale est autoadjointe, et la matrice d'une application linéaire autoadjointe dans une base orthonormée est hermitienne.

5. Soit $a = (1, 1, i, i) \in \mathbb{C}^4$. Calculer la distance de a à H .

Par définition, la distance de a à H est $\|a - p_H(a)\|$. Avec (3),

$$\|a - p_H(a)\| = \|p_{H^\perp}(a)\|,$$

et donc avec (4),

$$\|a - p_H(a)\| = \|(e_0, a)e_0\| = \frac{1}{\|e'_0\|} |(e'_0, a)|.$$

Calcul auxiliaire :

$$(e'_0, a) = 1 + 2i, \quad |(e'_0, a)| = \sqrt{5}.$$

Donc

$$\|a - p_H(a)\| = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Exercice 2. On considère B l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on note $F = \text{vect}(\sin, \cos)$ le sous-espace vectoriel de B engendré par les fonctions sinus et cosinus.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in B$, on pose

$$N_\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} |f(x)| dx.$$

1. Montrer l'équivalence

$$(\forall f \in B, N_\alpha(f) \in \mathbb{R}) \iff (\alpha > 0).$$

Si $N_\alpha(f) \in \mathbb{R}$ pour tout f de B , alors en particulier $N_\alpha(\tilde{1}) \in \mathbb{R}$, en notant $\tilde{1}$ la fonction constante égale à 1, qui est continue et bornée donc appartient à B . Mais

$$N_\alpha(\tilde{1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

et cette intégrale est finie seulement si $\alpha > 0$. En effet, si $\alpha \leq 0$, la fonction $x \rightarrow e^{-\alpha x^2}$ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ n'est pas finie.

Réciproquement, si $\alpha > 0$, soit $f \in B$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$. Donc

$$N_\alpha(f) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx,$$

et cette dernière intégrale converge par décroissance rapide de l'exponentielle. (On peut par exemple comparer à une intégrale de Riemann : $e^{-x^2} \leq 1/x^2$, pour $|x|$ assez grand.) Donc $N_\alpha(f)$ est une intégrale convergente.

2. Montrer que pour $\alpha > 0$, N_α est une norme sur B .

On a prouvé à la question précédente que N_α va de B dans $\mathbb{R}$. L'intégrale d'une fonction positive étant positive, N_α prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si pour $f \in B$ on a $N_\alpha(f) = 0$, alors $x \rightarrow e^{-x^2} f(x)$ est une fonction positive continue dont l'intégrale est nulle. C'est donc la fonction nulle. Mais comme l'exponentielle ne s'annule pas, f est la fonction nulle.

Soit $f \in B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$N_\alpha(\lambda f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |f(x)| dx = |\lambda| N_\alpha(f),$$

par linéarité de l'intégrale, et par le fait que la valeur absolue soit une norme dans $\mathbb{R}$.

Enfin, soit $f, g \in B$. Par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

et donc par linéarité de l'intégrale

$$N_\alpha(f + g) \leq N_\alpha(f) + N_\alpha(g).$$

-
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto e^{-nx^2}$. Justifier que $f_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
-

La fonction f_n est continue et bornée donc appartient à B . Précisément : f_n est dérivable en tant que composée de fonctions usuelles dérivables, et $f'_n(x) = -2nxe^{-x^2}$, pour tout n et tout x . Donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, si bien que f_n atteint son maximum en 0 : $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout x et tout n .

4. On admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle pour la norme N_1 .
-

Il s'agit de prouver que la suite réelle $(N_1(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. On a

$$N_1(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-nx^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(n+1)x^2} dx.$$

On effectue le changement de variables $t = x\sqrt{n+1}$ pour se ramener à la fonction $x \rightarrow e^{-x^2}$ mentionnée dans l'énoncé. On a donc

$$N_1(f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}},$$

d'après l'indication de l'énoncé, d'où la convergence $N_1(f_n) \rightarrow 0$.

5. En déduire que les normes N_1 et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes dans B .
-

On a vu que la suite $(\|f_n\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, et que la suite (f_n) est une suite de B .

Si les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N_1 étaient équivalentes dans B , on aurait l'existence d'un $c > 0$ tel que pour tout $f \in B$,

$$\|f\|_{\infty} \leq cN_1(f).$$

Donc en particulier, on aurait $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 = \|f_n\|_{\infty} \leq cN_1(f_n),$$

et en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on trouverait $1 \leq 0$.

6. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge vers une fonction g pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x)$.
-

On a par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |g_n(y) - g(y)|,$$

et la suite majorante tend vers 0, donc la suite $(|g_n(x) - g(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. C'est-à-dire

$$g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x).$$

7. En déduire que F est un fermé de B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
-

Soit (g_n) une suite de F qui converge dans B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note g la limite de (g_n) . On cherche à prouver que $g \in F$. Cela prouvera que F est fermé dans B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout n , la fonction g_n est une combinaison linéaire de cos et sinus. Donc il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = a_n \cos(x) + b_n \sin(x). \quad (5)$$

Par la question précédente, on sait que $(g_n(x))$ est une suite réelle qui converge vers $g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $(g_n(0))$ est une suite convergente. Mais pour tout n , $g_n(0) = a_n$. Donc (a_n) est une suite réelle convergente. Notons a sa limite. Par ailleurs, $g_n(\pi/2)$ est une suite réelle convergente. Comme $g_n(\pi/2) = b_n$ pour tout n , la suite (b_n) est convergente, vers $b \in \mathbb{R}$.

En revenant à x quelconque dans $\mathbb{R}$, et en passant à la limite dans l'égalité (5), on obtient

$$g(x) = a \cos(x) + b \sin(x),$$

et donc $g \in F$.

8. La restriction de l'application N_1 au sous-espace vectoriel F est encore une norme sur F . De même, la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à F est encore une norme sur F . Les normes N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ sur F sont-elles équivalentes ?
-

Oui, car F est de dimension finie (égale à 2).

9. On désigne par $\tilde{1}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1. Soient $r > 0$ et $h \in B$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la fonction $h + a\tilde{1}$ appartienne à la boule ouverte de centre h et de rayon r dans B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
-

Soit $f_a = h + a\tilde{1}$. Cette fonction appartient à la boule ouverte de centre h et de rayon r dans B pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_a(x) - h(x)| < r.$$

C'est-à-dire, par définition de f_a ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |a\tilde{1}(x)| < r,$$

et par définition de $\tilde{1}$, cela équivaut à

$$|a| < r.$$

10. En déduire que l'intérieur de F dans B pour la norme infinie est vide.
-

On suppose que l'intérieur de F dans B pour la norme infinie n'est pas vide. Soit donc h dans cet intérieur : il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de centre h et de rayon r soit toute entière incluse dans F . Mais d'après la question précédente, la fonction $h + (r/2)\tilde{1}$ appartient à cette boule. Donc $h + (r/2)\tilde{1}$ appartient à F . Comme F est un espace vectoriel, cela implique que la fonction $\tilde{1}$ appartient à F , et donc qu'on peut trouver des coefficients $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 = \beta \cos(x) + \gamma \sin(x)$. En prenant $x = 0$, on trouve $\beta = 1$, puis en prenant $x = \pi$ on trouve $\beta = -1$, ce qui est une contradiction.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour un sous-espace vectoriel F de E , on note p_F la projection orthogonale sur F .

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $F = \{x \in E, \|x\| = \|p_F(x)\|\}$.

Soit $x \in F$. Alors $p_F(x) = x$, et donc $\|x\| = \|p_F(x)\|$. Réciproquement, tout $x \in E$ se décompose de manière unique en

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x), \quad (6)$$

et par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2.$$

Donc si $\|x\| = \|p_F(x)\|$, alors $\|p_{F^\perp}(x)\|^2 = 0$, et donc $p_{F^\perp}(x) = 0$, ce qui implique $x = p_F(x)$, et donc $x \in F$.

2. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $p_F \circ p_G = p_H$. Montrer que $F \cap G = H$.

Soit $x \in F \cap G$. Alors $p_H(x) = p_F(p_G(x))$ par hypothèse. Comme $x \in G$, par la première question, on a $p_G(x) = x$. Donc $p_H(x) = p_F(x)$. Comme $x \in F$, par la première question, on a $p_F(x) = x$. Donc $p_H(x) = x$. On utilise à nouveau la première question : cela implique $x \in H$.

Réciproquement, soit $x \in H$. Alors $p_H(x) = x$. Donc $p_F(p_G(x)) = x$, et donc x appartient à l'image de p_F , donc à F . Il suffit maintenant de prouver que $x \in G$. De $x = p_F(p_G(x))$ on déduit

$$\|x\| = \|p_F(p_G(x))\| \leq \|p_G(x)\|$$

par propriété d'une projection orthogonale ($\|p_F(x)\| \leq \|x\|$, ce qui est une conséquence de (6)). Mais comme on a aussi $\|p_G(x)\| \leq \|x\|$, on obtient finalement

$$\|x\| \leq \|p_G(x)\| \leq \|x\|,$$

et donc $\|x\| = \|p_G(x)\|$, ce qui implique $x \in G$ avec la première question.