Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI Durée : 1 heure et trente minutes

Correction du devoir numéro 2

Questions. (3pts) Soient C_1, C_2, C_3, C_4, quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Donner une courte motivation pour chaque réponse.

(1pt) $\boxed{\text{F}}$ $\det(2C_1 + 3C_2, C_2, C_3, C_4) = 6\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$.
Le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne an ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes. Donc on a : $\det(2C_1 + 3C_2, C_2, C_3, C_4) = \det(2C_1, C_2, C_3, C_4) = 2\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

(1pt) $\boxed{\text{V}}$ Si $C_1 + C_2 = C_3 + C_4$, alors $\det(C_1, C_2, C_3, C_4) = 0$.
On remarque que $C_1 = C_3 + C_4 - C_2$, donc une colonne est combinaison linéaires des autres. Le déterminant et alors égal a 0.

(1pt) $\boxed{\text{V}}$ $\det(2C_1 + 3C_2, C_2, C_3, 2C_4 - 3C_3) = 4\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$.
En raisonnant comme au premier point, on a : $\det(2C_1 + 3C_2, C_2, C_3, 2C_4 - 3C_3) = \det(2C_1, C_2, C_3, 2C_4 - 3C_3) = \det(2C_1, C_2, C_3, 2C_4) = 2\det(C_1, C_2, C_3, 2C_4) = 2 \cdot 2\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

Exercice 1. (4pts) Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. Indication : Développer par rapport à une colonne convenable pour obtenir Δ_{n-1} et un autre déterminant facile à calculer.

En développant le déterminant par rapport à la première colonne on obtient :

$$\Delta_n = a \cdot \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ a & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad (1\text{pt})$$

En développant le déterminant de la deuxième matrice (de taille $n-1$) par rapport à la première ligne, on a :

$$= a \cdot \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1) \cdot (-1)^n (n-1) \cdot a^{n-2}. \qquad (1\text{pt})$$

En effet la sous-matrice qui reste après avoir effacé la première ligne et la dernière colonne est la matrice diagonale $a \cdot I_{n-2}$, de taille $(n-2)$. On remarquera au passage que $(-1)^{n+1}(-1)^n$ est toujours impair. On obtient ainsi :

$$\Delta_n = a \cdot \Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}. \qquad (0,5\text{pt}) \qquad (1)$$

Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

(0,5pts) Pour $n = 2$, on obtient $\Delta_2 = a^2 - a^{2-2} \sum_{i=1}^{1} i^2 = a^2 - 1$. En calculant directement $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, d'où l'égalité.

(1pt) On suppose $n \geq 3$ et le résultat vrai pour Δ_{n-1}. Par (1) on a

$$\begin{aligned} \Delta_n &= a \cdot \Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2} \\ &= a \cdot \left(a^{n-1} - a^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} i^2 \right) - (n-1)^2 a^{n-2} \qquad \text{(par recurrence)} \\ &= a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2. \end{aligned}$$

Exercice 2. (5pts) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\det(A + X) = \det(A) + \det(X). \qquad (*)$$

(1pt) Montrer que $\det(A) = 0$. Indication : on pourra poser $X = A$ dans $(*)$.

En utilisant $(*)$ on trouve $\det(2A) = \det(A + A) = \det(A) + \det(A) = 2\det(A)$. Or, $\det(2A) = 2^n \det(A)$, où n est la taille de la matrice. On en déduit que $2^n \det(A) = 2\det(A)$, et comme $n \geq 2$, $\det(A) = 0$.

(0,5pts) En déduire que $r = \operatorname{rang}(A) < n$.

Comme $\det(A) = 0$, le rang de A ne peut pas être maximum, d'où $\operatorname{rg}(A) < n$. Sinon, $\det(A) = 0$ implique que la matrice A n'est pas inversible. Il s'en suit que $\operatorname{rg}(A) < n$.

(1pt) Expliquer pourquoi on peut écrire $A = QJ_rP$, avec P, Q inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$.

Il est clair que $\operatorname{rg}(J_r) = r$. Alors A et J_r sont deux matrices avec le même rang, donc elles sont équivalentes.

(1pt) Posons $X = QJ'_rP$ où $J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$. Calculer $A + X$ et en déduire qu'il s'agit d'une matrice inversible.

Un calcul direct montre que $A + X_0 = QJ_rP + QJ'_rP = Q(J_r + J'_r)P = QI_nP = QP$. Or, les matrices Q et P sont inversibles et leur produit est bien une matrice inversible. Pour voir ce dernier point, il suffit remarquer que $\det(QP) = \det(Q)\det(P) \neq 0$, car $\det(Q) \neq 0$ et $\det(P) \neq 0$, ou que $P^{-1}Q^{-1}$ est la matrice inverse de QP.

(1pt) Calculer $\det(A + X)$ à l'aide de l'équation $(*)$, et en déduire que J'_r est la matrice identité.

En utilisant $(*)$ on a $\det(A+X_0) = \det(A)+\det(X_0) = \det(X_0) = \det(Q)\det(J'_r)\det(P)$. Comme $(A+X_0)$, P et Q sont des matrices inversibles, on obtient que $\det(A+X_0)$, $\det(P)$ et $\det(Q)$ ne sont pas nuls, et alors aussi $\det(J'_r) \neq 0$. Ceci est possible si et seulement si $r = 0$, c-à-d que $J'_r = I_n$, la matrice identité de taille n.

(0,5pts) En déduire que $A = 0$.

Du précédent point on sait que $r = 0$, et la seule matrice de rang 0 est la matrice nulle.

Exercice 3. (5,5pts) Etude de la nature des séries suivantes

(3pts) $\sum_{n\geq 0} U_n$ avec $U_n = a^n\left(\dfrac{2\,n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)^n$ $\forall\, a \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} U_n &= a^n \exp\left(n \ln \frac{2\,n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right) \\ &= a^n \exp\left[n\left(\ln 2 + \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)\right] \\ &= (2a)^n \exp\left[n\left(\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \\ &= (2a)^n \exp\left(\frac{3}{2}(-1)^n + \bigcirc\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Or $\exp\left(\frac{3}{2}(-1)^n + \bigcirc\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ est borné, donc on doit distinguer deux cas :

- Si $|a| < \dfrac{1}{2}$, il existe $M > 0$ tel que $|U_n| < (2|a|)^n \times M$ pour tout n, ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est absolument convergente car majorée par une série géométrique convergente.
- Si $|a| \geq \frac{1}{2}$, la suite $((2|a|)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ; la suite de terme général $\exp\left(\frac{3}{2}(-1)^n + \bigcirc\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ne tend pas vers 0 car vaut soit $e^{\frac{3}{2}}$ ou $e^{-\frac{3}{2}}$ quand n tend vers l'infini. En conclusion, U_n ne tend pas vers 0 et par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ diverge.

(2,5pts) $\sum_{n\geq 0} U_n$ avec $U_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{k\,sin(k)}{k^4+2\,k^3\,sin(k)+9}$

$$\begin{aligned} |U_n| &= \left|\sum_{k=n}^{2n} \frac{k\,sin(k)}{k^4+2\,k^3\,sin(k)+9}\right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{k\,sin(k)}{k^4+2\,k^3\,sin(k)+9}\right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{k}{k^4+2\,k^3\,sin(k)+9}\right| \end{aligned}$$

Or $|k^4+2\,k^3\,sin(k)+9| \geq k^4 - 2\,k^3+9$ car $sin(x) \geq -1$

donc

$$\begin{aligned} |U_n| &\leq \sum_{k=n}^{2n}\left|\frac{k}{k^4-2\,k^3+9}\right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{2n}{n^4-2\,(2n)^3+9} \end{aligned}$$

Le terme sommé ne dépend plus de k ainsi

$$|U_n| \leq (n+1) \times \frac{2n}{n^4-16n^3+9} \sim \frac{2}{n^2} \quad \text{à partir d'un certain rang}$$

Puisque la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente alors d'après le théorème de comparaison la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est absolument convergent donc convergente.

Exercice 4. (4,5pts)

(1,5pts) Etude de la convergence et calcul de la somme de la série de terme général

$$U_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)}.$$

Par une décomposition on écrit le terme général sous la forme $U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$ ainsi

$$\sum_{n\geq 0} U_n = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}$$

en posant $v_n = \frac{1}{n+2}$ alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} = \sum_{n\geq 0} v_{n+1} - v_n$

on reconnaît ici une série télescopique ce qui donne $\sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} - v_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} - v_0 = -\frac{1}{2}.$

Ainsi $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \frac{1}{2}.$

(2pts) a) Etude de la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx.$$

On décompose l'intégrale en deux parties : $\int_0^1 \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx.$

- Pour $\int_0^1 \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$

  au voisinage de 0, on a $\frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or d'après Bertrand $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge ($\frac{1}{2} < 1$) d'où par le théorème de comparaison $\int_0^1 \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.

- Pour $\int_1^{\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$

  au voisinage de l'infini on a grâce aux croissances comparées on a :

$$\exp(x) \geq x^2 \implies \sqrt{x}\exp(x) \geq x^{3/2} \implies \frac{1}{\sqrt{x}\exp(x)} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

  Or l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} d\,x$ converge d'après Bertrand ($\frac{3}{2} > 1$) d'où par comparaison on a bien l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$ qui converge.

(1pt) b) Nature de la série de terme général

$$U_n = \frac{\exp(-n)}{\sqrt{n}}$$

En posant $f(x) = \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}}$ on vérifie facilement que f est une fonction positive décroissance sur $]0, +\infty[$ et de plus $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ alors d'après le théorème de comparaison entre série et intégrale on a $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$ sont de même nature. D'où la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(-n)}{\sqrt{n}}$ converge d'après le résultat du a).