Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 2

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.

1. Montrer que 1 est une racine double de P.
2. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle définie par $F(X) = \dfrac{X+1}{P(X)}$. Déterminer la décomposition en élélments simples de F sur $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x) + \sin(x))}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{\ln(1+x^2)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$. On suppose que 1 est racine de P. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles 1 est une racine multiple de P.

Exercice 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x}$.

1. Calculer le développement limité de f en 1 à l'ordre 2. En déduire la valeur de $f''(1)$.
2. (a) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (b) En déduire que f est prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction dérivable. On note encore f ce prolongement. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
   (c) Donner l'équation de Δ, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et préciser, en justifiant, si la courbe représentative de f est au dessus, en dessous ou si elle traverse Δ au voisinage de 0.
3. (a) Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
   (b) Calculer la limite suivante
   $$\lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - \frac{2\ln(x)}{x} \right).$$

Exercice 5. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Soit Q le quotient dans la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$.

1. Montrer que $P'(\alpha) = Q(\alpha)$.
2. En utilisant le polynôme $P(X) = X^n - 1$ montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2k\pi}{n} i}) = n$, pour tout $n \geq 2$.