**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

---

**Partie commune - Devoir numéro 2 : correction**

---

*L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.*

*Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.*

**Exercice 1.** *On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.*

1. *Montrer que 1 est une racine double de $P$.*

   $P$ admet 1 comme racine double si et seulement si $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$. On a

   $$P'(X) = 3X^2 - 8X + 5, \quad P''(X) = 6X - 8,$$

   $$P(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0, \quad P'(1) = 3 - 8 + 5 = 0, \quad P''(1) = 6 - 8 = -2 \neq 0.$$

   Par conséquent 1 est bien une racine double de $P$.

2. *En déduire la décomposition de $P$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.*

   Comme 1 est une racine double de $P$, ce dernier est divisible par $(X-1)^2$. Comme $deg(P) = 3$ et comme le coefficient dominant de $P$ est 1, on peut écrire $P(X) = (X-1)^2(X+a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Par développement et identification (ou par division euclidienne) on obtient

   $$P(X) = (X-1)^2(X-2)$$

   qui est la décomposition recherchée de $P$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

3. *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle définie par $F(X) = \dfrac{X+1}{P(X)}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $F$ sur $\mathbb{R}(X)$.*

   Comme $X + 1$ et $P$ n'ont pas de racine commune, leur PGCD est 1. Par conséquent, $F$ est irréductible et comme $deg(F) < 0$ sa partie entière est nulle. Donc d'après le théorème de la décomposition en élélments simples sur $\mathbb{R}(X)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant

   $$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{(X-1)^2} + \frac{\beta}{X-2}.$$

   - Calcul de $\alpha_1$. Par la méthode des dérivées :

   $$\alpha_1 = (\frac{X+1}{X-2})'\Big|_{X=1} = \frac{-3}{(X-2)^2}\Big|_{X=1} = -3.$$

- Calcul de $\alpha_2$. Par multiplication-évaluation :

$$\alpha_2 = \frac{X+1}{X-2}\Big|_{X=1} = -2.$$

- Calcul de $\beta$. Par multiplication-évaluation :

$$\beta = \frac{X+1}{(X-1)^2}\Big|_{X=2} = 3.$$

D'où la décomposition recherchée :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{3}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{X-2}.$$

**Exercice 2.** *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x)+\sin(x))}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{\ln(1+x^2)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln(1+x)}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x)+\sin(x))}{x^2} = 1$$

en effet, en utilisant les développements de exp, cos et sin à l'ordre 2 en 0, on obtient

$$e^x - (\cos(x)+\sin(x)) = x^2 + o(x^2).$$

On obtient ainsi

$$\frac{e^x - (\cos(x)+\sin(x))}{x^2} = 1 + o(1)$$

d'où on déduit la limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)}{\ln(1+x^2)} = +\infty$$

en effet le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers $0^+$ (car $1+x^2 > 1$ que $x$ tende vers 0 en étant négatif ou positif).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2}$$

en effet, dès que $y \to +\infty$, on a $\ln(1+y) \sim \ln(y)$ car

$$\frac{\ln(1+y)}{\ln(y)} = \frac{\ln(y) + \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\ln(y)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\ln(y)} \to 1.$$

Donc, en faisant le quotient des équivalents

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln(1+x)} \sim \frac{\ln(\sqrt{x})}{\ln(x)} = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 3.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$. On suppose que 1 est racine de $P$. Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ pour lesquelles 1 est une racine multiple de $P$.*

Comme 1 est une racine de $P$, $P(1) = 0$ et donc $1 + a + b + a + 1 = 0$, on peut écrire $2a + b + 2 = 0$. On a

$$P'(X) = 4X^3 + 3aX^2 + 2bX + a, \quad P'(1) = 4 + 3a + 2b + a = 2(2a+b+2) = 0$$

et donc 1 est une racine au moins double . Donc $(X-1)^2$ divise $P$. Par division euclidienne (ou en écrivant $P(X)=(X-1)^2(X^2+\alpha X+\beta)$ et par développement-identification) on a

$$P(X)=(X-1)^2(X^2+(a+2)X+1).$$

Par conséquent 1 est une racine au moins triple si et seulement si 1 est racine de $X^2+(a+2)X+1$. Donc $a=-4$ et en utilisant l'équation $2a+b+2=0$ on obtient $b=6$.
Si $a=-4$ alors $X^2+(a+2)X+1=(X-1)^2$ et donc 1 est une racine de multiplicité 4.
Conclusion :
- 1 n'est pas une racine simple, ni triple de $P$.
- 1 est une racine double si et seulement si $a\neq -4$ et $b=-2a-2$ $(\neq 6)$.
- 1 est une racine de multiplicité 4 si et seulement si $a=-4$ et $b=6$.

**Exercice 4.** *On définit la fonction* $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x}$.

1. *Calculer le développement limité de $f$ en 1 à l'ordre 2. En déduire la valeur de $f''(1)$.*

   On pose $x=1+t$ pour se ramener en 0 et on calcule :

$$\begin{aligned}
f(1+t) &= \frac{\ln(1+(1+t)+(1+t)^2)}{1+t}\\
&= \left[\ln(3)+\ln\left(1+t+\frac{1}{3}t^2\right)\right](1+t)^{-1}\\
&= \left[\ln(3)+\left(t+\frac{1}{3}t^2\right)-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{3}t^2\right)^2+o(t^2)\right]\Big(1-t+t^2+o(t^2)\Big)\\
&= \Big(\ln(3)+t-\tfrac{1}{6}t^2+o(t^2)\Big)\Big(1-t+t^2+o(t^2)\Big)\\
&= \ln(3)+\Big(1-\ln(3)\Big)t+\Big(\ln(3)-\tfrac{7}{6}\Big)t^2+o(t^2).
\end{aligned}$$

   Ainsi on a

$$f(x)=\ln(3)+\Big(1-\ln(3)\Big)(x-1)+\left(\ln(3)-\frac{7}{6}\right)(x-1)^2+o\Big((x-1)^2\Big)$$

   De plus, $f$ est de classe $C^2$ en 1, ainsi, d'après la formule de Taylor Young et l'unicité des développements limités, le coefficient devant $(x-1)^2$ est égal à $\frac{1}{2!}f''(1)$. On en déduit

$$f''(1)=2\left(\ln(3)-\frac{7}{6}\right)=2\ln(3)-\frac{7}{3}.$$

2. (a) *Calculer le développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 2.*

   Le développement limité demandé est en 0 à l'ordre 2, comme l'expression de $f$ contient une division par $x$, on calcule le développement limité de $x\mapsto\ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x+x^2) &= (x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3+o(x^3)\\
&= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

   Ainsi $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$ lorsque $x$ tend vers 0.

(b) *En déduire que $f$ est prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction dérivable. On note encore $f$ ce prolongement. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.*

Comme $f$ admet un développement à l'ordre 1 (au moins) en 0 alors $f$ se prolonge de manière continue et dérivable en 0 et on récupère

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

(c) *Donner l'équation de $\Delta$, la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 et préciser, en justifiant, si la courbe représentative de $f$ est au dessus, en dessous ou si elle traverse $\Delta$ au voisinage de 0.*

L'équation de $\Delta$ est donnée par la partie affine du développement de $f$ en 0 c'est-à-dire $\Delta : y = \frac{1}{2}x + 1$. De plus, le premier coefficient non nul après la partie affine du développement est $-\frac{2}{3}x^2$ ; $-\frac{2}{3}$ est négatif et l'exposant en $x$ est pair. On en déduit que la courbe représentative de $f$ reste sous sa tangente au voisinage de 0.

3. (a) *Trouver un équivalent de $f$ en $+\infty$.*

Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, le terme prépondérant dans le ln est $x^2$, on factorise par celui-ci et on obtient

$$f(x) = \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Le terme $\frac{1}{x}\ln(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ par croissance comparée et le terme $\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ est de la forme “$\frac{0}{+\infty}$” donc il tend lui aussi vers 0. On ne peut pas conclure tout de suite. Le premier terme comporte un ln qui tend vers $+\infty$ tandis que le second comporte un ln qui tend vers 0, on s'attend donc à ce que ce soit le terme $\frac{1}{x}\ln(x)$ qui soit prépondérant. Concrètement, on calcule

$$\frac{f(x)}{2\frac{\ln(x)}{x}} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}.$$

Le terme de droite dans la somme tend bien vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2\frac{\ln(x)}{x}} = 1$$

autrement dit $f(x) \sim 2\frac{\ln(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

(b) *Calculer la limite suivante*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{2\ln(x)}{x}\right).$$

À l'aide de ce qui a été fait à la question précédente, on a

$$f(x) - \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Le terme à gauche de l'égalité tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$, on a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0.$$

**Exercice 5.** Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $P$. Soit $Q$ le quotient dans la division euclidienne de $P$ par $(X-\alpha)$.

1. *Montrer que* $P'(\alpha) = Q(\alpha)$.

   Comme $Q$ est le quotient dans la division euclidienne de $P$ par $(X-\alpha)$, on a $P(X) = (X-\alpha)Q(X) + R(X)$ avec $deg(R) \leqslant 0$ et comme $\alpha$ est racine de $P$, on a $R = 0$. D'où

   $$P(X) = (X-\alpha)Q(X).$$

   En dérivant, on obtient

   $$P'(X) = Q(X) + Q'(X)(X-\alpha)$$

   et en substituant $\alpha$ à $X$

   $$P'(\alpha) = Q(\alpha)$$

   qui est l'identité recherchée.

2. *En utilisant le polynôme* $P(X) = X^n - 1$ *montrer que* $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}) = n$, *pour tout* $n \geq 2$.

   Considérons donc le polynôme $P(X) = X^n - 1$ où $n \geq 2$. Les racines de $P$ sont les racines $n$-ièmes de l'unité

   $$e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \quad k \in \{0, \cdots, n-1\}.$$

   Donc la décomposition en facteurs irréductibles de $P$ sur $\mathbb{C}[X]$ est

   $$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2k\pi}{n}i}).$$

   Or 1 est une racine de $P$ et

   $$P(X) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2k\pi}{n}i}).$$

   Donc $Q(X) = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{\frac{2k\pi}{n}i})$ est le quotient dans la division euclidienne de $P$ par $(X-1)$ . On a

   $$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}) = Q(1)$$

   et d'après la question 1, $Q(1) = P'(1) = nX^{n-1}\Big|_{X=1} = n$. On conclut donc

   $$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i}) = n$$

   pour tout $n \geq 2$.