**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2025-2026
Maths IV PMI - Algèbre

---

**DS2 du 17 mars 2026**

---

**Exercice 1.**
Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère le sous-espace

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\,;\ x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}\,.$$

Soit $b = (1, 8, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Calculez le projeté orthogonal de $b$ sur $F$ et la distance de $b$ à $F$.

**Exercice 2.**
(Dans cet exercice les 2 questions sont indépendantes)

1. Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^3$ montrez que l'ensemble

   $$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + 4xy + 5y^2 + z^2 \leq 1\}$$

   est compact et que l'ensemble

   $$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + 4xy + 3y^2 + z^2 \leq 1\}$$

   ne l'est pas.
2. Dans l'espace vectoriel normé $M_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
   (a) L'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ est-il fermé ?
   (b) L'ensemble $S_2(\mathbb{R})$ est-il ouvert ?

**Exercice 3.**
Sur l'espace $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})\,;\, f(0) = 0\}$. Sur cet espace on considère la norme $N_\infty(f) = \sup\{|f(x)|\,; x \in [0, 1]\}$ (on admet que c'est une norme sur $E$).
On définit aussi, pour tout $f \in E$

$$N(f) = \sup\{|f(t) + f'(t)|\,;\, t \in [0, 1]\}.$$

1. Montrer que $N$ est une norme sur $E$.

   On considère les fonctions $f_n : t \longmapsto \dfrac{t^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge pour la norme infinie et préciser sa limite.
3. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ pour la norme $N$.
4. Les normes $N$ et la norme infinie sont-elles équivalentes ?

**Exercice 4.**
Soit $E$ un espace euclidien et $p$, $q$ deux projections orthogonales de $E$.

1. On suppose dans cette question que $p + q$ est une projection orthogonale.
   (a) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont orthogonaux.
2. On suppose désormais que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$ sont orthogonaux.
   (a) Montrer que $(\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q)^\perp = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ de E obtenue par concaténation d'une base $B_1$ de $\mathrm{Im}\, p$, d'une base $B_2$ de $\mathrm{Im}\, q$ et d'une base $B_3$ de $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
   (c) Ecrire la matrice de $p + q$ dans la base $B$ et montrer que $p + q$ est une projection orthogonale de $E$.