Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir n° 2

Partie Algèbre

Exercice 1. Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

1. Calculer le produit AV,
2. Calculer $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note B_n le déterminant de la matrice $n \times n$:

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

1. Calculer B_2 et B_3,
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$,
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Partie Analyse

Exercice 3. Déterminer la nature de la convergence et la valeur de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

Exercice 4. Etudier la nature de la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)\cos(k)}{k\ln(1+k)}$.

Exercice 5. Pour $a \in (1/4, \infty)$, on considère la série dont le terme général est donné par

$$u_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}} - 1}{n^a}.$$

Discuter la nature de la convergence en fonction de a (en commençant par les cas faciles).

Exercice 6. Pour tout $n \geq 1$ on pose $a_n = \frac{1}{4n^3-n}$.

1. Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente,
2. Démontrer que $a_n = \int_0^1 x^{2n-2}(1-x)^2 \mathrm{d}x$,
3. En déduire que l'on a $\sum_{n=1}^{N} a_n = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}(1 - x^{2N})\mathrm{d}x$,
4. Quelle est la valeur de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Une justification même partielle sera acceptée.